Lois à densité

▷ **Exercice 1.** Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,+\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = a\cos(x)$ où a désigne un nombre réel.

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire dont la densité de probabilité est f.
   Calculer $p\left(X \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]\right)$; $p\left(X < \frac{\pi}{3}\right)$; $p_{X<\frac{\pi}{3}}\left(X \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]\right)$

▷ **Exercice 2.**

1. a) Vérifier que la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction ln.
   b) Déterminer un nombre réel $b > 1$ tel que $\int_1^b \ln x\,dx = 1$.
   On peut alors considérer la fonction ln comme une densité de probabilité sur l'intervalle $[1\,;\,b]$.
2. X est une variable aléatoire suivant la loi de densité ln sur l'intervalle $[1\,;\,b]$.
   a) Calculer $p(X \leqslant 2)$.
   b) Sachant que X est supérieur à 2, calculer la probabilité que X soit inférieur à 2,5.

▷ **Exercice 3.** la production quotidienne X d'un produit en tonnes est une variable aléatoire continue qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;\,10]$ avec la densité de probabilité f définie par $f(x) = 0{,}06x - 0{,}006x^2$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité sur $[0\,;\,10]$.
2. a) Calculer les probabilités des événements suivants :
   - A :« La production est inférieure à 7 tonnes »
   - B :« La production dépasse 6 tonnes »

   b) Calculer $P_B(A)$.

▷ **Exercice 4.** Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par : $f(x) = x + \frac{1}{2}$.

1. Montrer que f est une fonction de densité de probabilité sur $[0\,;\,1]$.
2. la variable aléatoire X admet la fonction f comme loi de densité. Calculer :
   a) $P(X < 0{,}25)$ b) $P\left(X > \frac{1}{3}\right)$ c) $P(0{,}1 < X < 0{,}7)$ d) $E(X)$

▷ **Exercice 5.** Dans un supermarché un jour de grande affluence, le temps d'attente T à la caisse, en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[2\,;\,20]$.

1. Définir la fonction de densité de probabilité f de la loi de T.
2. Loréane arrive à la caisse à 17h. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit partie avant 17h15 ?
3. Loréane doit recevoir un coup de téléphone à 17h10.
   a) Quelle est la probabilité que son téléphone sonne alors qu'elle est encore à la caisse ?
   b) Sachant que Loréane est encore à la caisse à 17h05, quelle est la probabilité que son téléphone sonne avant qu'elle ne soit partie ?
4. Quel est le temps d'attente moyen à la caisse ?

▷ **Exercice 6.** Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à la station 14. Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0\,;\,6]$.
Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ?

▷ **Exercice 7.** Un TGV part toutes les deux heures à partir de 6h30 et jusqu'à 10h30. Marine doit prendre l'un de ces trains et arrive entre 8h et 11h à la gare. On considère X la variable aléatoire correspondant à l'heure d'arrivée de Marine à la gare en nombre de minutes après 6h30.

1. On suppose que X suit une loi uniforme. Préciser sur quel intervalle.
2. Calculer la probabilité que Marine ne puisse pas prendre un TGV.

3. Calculer la probabilité que Marine attende moins de 30 minutes avant l'arrivée d'un TGV.

4. Calculer la probabilité que Marine attende plus d'une heure avant de prendre un TGV.

▷ **Exercice 8.** Un auto-entrepreneur vend des objets sur un site d'enchères par internet. Le prix de vente final de ces objets est distribué selon une loi uniforme sur l'intervalle $[\,10\,;\,50\,]$, 10 étant le prix de vente minimal fixé par le vendeur.

1. Quelle est la probabilité que le prix final d'un objet soit supérieur à 40 € ?

2. Le vendeur achète lui-même les objets auprès d'un grossiste, au prix de 20 € pièce. Quelle est la probabilité que le prix de vente final d'un objet soit inférieur à ce prix d'achat ?

3. Les enchère pour un objet ont atteint 15 €. Quelle est la probabilité que le prix de vente final soit supérieur au prix d'achat ?

4. Calculer le gain moyen par objet pour le vendeur.

▷ **Exercice 9.** Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc.

Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement. Dans tout l'exercice, les résultats numériques seront arrondis au millième.

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :

   a) comprise entre 50 et 100 km ;

   b) supérieure à 300 km.

2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 kilomètres sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres ?

▷ **Exercice 10.**

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

   On sait que $P(X \leqslant 2) = 0,15$.

   Déterminer la valeur exacte du réel λ.

Dans la suite de l'exercice on prendra $0,081$ pour valeur de λ.

2. a) Déterminer $P(X \geqslant 3)$.

   b) Montrer que pour tous réels positifs t et h, $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$.

   c) Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?

   d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.

▷ **Exercice 11.** Un magasin vend des moteurs électriques tous identiques. Une étude statistique du service après-vente a permis d'établir que la probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à $0,12$.

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3}

Partie A

Une entreprise achète 20 moteurs électriques dans ce magasin. On admet que le nombre de moteurs vendus dans ce magasin est suffisamment important pour que l'achat de 20 moteurs soit assimilé à 20 tirages indépendants avec remise.

1. Quelle est la probabilité que deux moteurs exactement tombent en panne durant la première année d'utilisation ?

2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des moteurs tombe en panne au cours de la première année d'utilisation ?

Partie B

On admet que la durée de vie sans panne, exprimée en années, de chaque moteur est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ, est un réel strictement positif.

Dans les questions 1, 2, 3, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

1. Exprimer $p(Y \leqslant 1)$ en fonction de λ. En déduire la valeur de λ.

   Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,128$.

2. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 3 ans ?

3. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 4 ans sachant qu'il a duré plus d'un an ?

4. Calculer E(Y), puis interpréter le résultat.

▷ **Exercice 12.** Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1,5$.

Partie A

1. Calculer $P(X \leqslant 1)$, en donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près par excès.

2. Calculer $P(X \geqslant 2)$.

3. Déterminer $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$ à 10^{-3} près.

4. Quelle est l'espérance mathématique de X ?

Partie B : Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine. On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1{,}5$.

Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas. Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.

   a) Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,915 à 10^{-3} près.

   b) Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?

2. On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose que le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.

   a) Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?

   b) Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?

▷ **Exercice 13.** Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.

Partie A : On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés. Alain achète 50 composants.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-1} près.

2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

3. Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux?

Partie B : On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5 \times 10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$ (on pourra se reporter au formulaire ci-dessous).

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures :

   a) si ce composant est défectueux ;

   b) si ce composant n'est pas défectueux. Donner une valeur approchée de ces probabilités 10^{-2} près.

2. Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.

   Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est :

   $$P(T \geqslant t) = 0,02\mathrm{e}^{-5\times 10^{-4}t} + 0,98\mathrm{e}^{-10^{-4}t}.$$

   (on rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02).

3. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

▷ **Exercice 14.**

Partie A : On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$. On se propose de calculer l'espérance mathématique de X, notée E(X), et définie par $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$. On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(t) = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

1. Soit x un nombre réel strictement positif. Vérifier que $\int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1\right)$.

2. En déduire que $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{\lambda}$.

Partie B : La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$. La courbe de la fonction densité associée est donnée en **annexe**.

1. Sur le graphique de l'annexe 2 (à rendre avec la copie) :

a) Représenter la probabilité $P(X \leqslant 1)$.

b) Indiquer où se lit directement la valeur de λ.

2. On suppose que $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 2$.

a) Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?

b) Calculer la valeur de λ.

c) Calculer $P(X \leqslant 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 0,01 près.
Interpréter ce résultat.

d) Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

ANNEXE de l'exercice 14