Cours Algébre Linéaire :

Espaces Vectoriels réels

Matrices

Applications Linéaires

Systèmes Linéaires

Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Faculté des Sciences Economiques et de Gestion

Première Année

Babacar M. NDIAYE. Année 2010-2011.

LMDAN, *babacarm.ndiaye@ucad.edu.sn*

http ://lmdan.ucad.sn

Notes

Ces notes de cours correspondent à un enseignement de première année de la FASEG. Ceci ne constitue qu'une **première version** et les chapitres manquants seront complétées au fur et à mesure qu'on avancera au cours de l'année.
Ce cours est le résultat d'une réflexion technique pédagogique dont j'espère qu'il apportera aux étudiants une stimulation intellectuelle et un encouragement à persévérer, chaque fois que la compréhension d'un phénomène économique leur posera des difficultés.
Bien qu'ayant relu attentivement toutes les notes, il reste plusieurs imperfections. Je

demande aux étudiants de m'en excuser, et de me les signaler afin d'en améliorer la qualité. Leurs camarades de l'année prochaine leur en seront reconnaissants.

Table des matières

1 ESPACES VECTORIELS SUR $\mathbb{R}$

L'utilisation d'espaces vectoriels reste un cadre théorique pour de nombreux modèles économiques et de gestion.

Dans les applications économiques, les espaces ont souvent une dimension supérieure à 2. La répartition des parts de marché entre différentes marques pour un produit donné, les résultats possibles d'un tirage au hasard dans une population, les valeurs possibles d'un prix du baril dans un an peuvent être représentés par des vecteurs caractérisés par un nombre de coordonnées supérieur à deux. Il en est de même pour l'ensemble des notes obtenues par un étudiant à la fin d'un semestre ou par les notes de mille étudiants de première année dans une matière donnée.

Dans la section 1.1 nous présentons la définition formelle d'un espace vectoriel ainsi que les propriétés élémentaires de ces structures. Nous restreignons le cours aux espaces dont les vecteurs ont un nombre fini de coordonnées.

1.1 Généralités

Dans tout ce qui suit : $\mathrm{K} = \mathbb{R}$, muni des lois + et . naturelles.

1.1.1 Définition d'un espace vectoriel

Définition 1.1. *On appelle* **K-espace vectoriel** *ou* **espace vectoriel** *sur* **K**, *tout ensemble* E, *dont les éléments sont appelés* **vecteurs**, *muni d'une loi de composition interne (appelée addition et notée « + ») et d'une loi de composition externe (appelée multiplicateur par un scalaire et notée « . ») vérifiant :*

1. *L'addition est une loi de composition interne sur* E *:* $\forall (u,v) \in \mathrm{E}^2$, $u+v$ *existe et :* $u+v \in \mathrm{E}$.
2. *L'addition est associative, c'est à dire :*
$$\forall (u,v,w) \in \mathrm{E}^3, \quad (u+v)+w = u+(v+w) = u+v+w$$
3. *Il existe dans* E *un vecteur appelé élément neutre de l'addition, et noté «* **0** *», tel que pour tout vecteur* $u \in \mathrm{E}$, *on a :*
$$u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u$$
4. *Tout vecteur* u *de* E *possède un symétrique appelé opposé de* u, *c'est à dire :*
$$\forall u \in \mathrm{E}, \exists v \in \mathrm{E} \ \ \textit{tel que} \quad u+v = v+u = \mathbf{0}$$
Le vecteur v *est alors noté* $-u$.
Ce qui fait alors de (E,+) un groupe.
5. *L'addition est commutative, ce qui s'écrit :*
$$\forall (u,v) \in \mathrm{E}^2, \quad u+v = v+u$$
Ce qui rend le groupe (E,+) commutatif ou abélien.
La loi . ayant de plus les propriétés suivantes :
6. *C'est une loi de composition externe sur* E *:* $\forall u \in \mathrm{E}, \forall \alpha \in \mathrm{K}$, $\alpha.u$ *existe et :* $\alpha.u \in \mathrm{E}$
7. *La multiplication par un scalaire est associative :*
$$\forall (\alpha,\beta) \in \mathrm{K}^2, \forall u \in \mathrm{E}, \quad \alpha(\beta.u) = (\alpha\beta).u$$

8. *La multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition dans* K *:*

$$\forall(\alpha,\beta)\in \mathrm{K}^2, \forall u\in \mathrm{E}, \quad (\alpha+\beta).u=\alpha u+\beta u$$

9. *La multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition dans* E *:*

$$\forall \alpha\in \mathrm{K}, \forall(u,v)\in \mathrm{E}^2, \quad \alpha.(u+v)=\alpha u+\alpha v$$

10. *Le nombre* **1** *est l'élément neutre de la multiplication par un scalaire :*

$$\forall u\in \mathrm{E}, \quad 1.u=u$$

L'élément neutre de l'addition, noté $\mathbf{0}$ ou encore $\vec{\mathbf{0}}$, est appelé « vecteur nul ».

Remarque 1.1. *Les éléments de* E *sont appelés « vecteurs » et ceux de* $\mathbb{R}$ *« scalaires ».*

Remarque 1.2. *Ne pas confondre ce vecteur nul avec le 0 nombre réel.*

Remarque 1.3. *Pour désigner la multiplication par un scalaire, nous noterons aussi le produit* $\alpha.u$ *par* αu*.*

Remarque 1.4. *Les propriétés suivantes sont importantes :*

(i) $\forall u\in \mathrm{E}, \quad \mathbf{0}.u=\mathbf{0}$

(ii) $\forall \alpha\in\mathbb{R}, \quad \alpha.\mathbf{0}=\mathbf{0}$

(iii) $\forall u\in \mathrm{E}$ *et* $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ *on a :* $\alpha.u=\mathbf{0}\Longleftrightarrow(\alpha=0$ *ou* $u=\mathbf{0})$

(iv) $\forall\alpha\in\mathbb{R},\forall u\in \mathrm{E}, \quad (-\alpha).u=\alpha.(-u)=-(\alpha.u)$

(v) $\forall(u,v)\in \mathrm{E}^2,\forall\alpha\in\mathbb{R}, \quad \alpha.(u-v)=\alpha.u-\alpha.v$

(vi) $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\forall u\in \mathrm{E}, \quad (\alpha-\beta)u=\alpha.u-\beta.u$

(vii) $\forall(u,v,w)\in \mathrm{E}^3 : \quad u+w=v+w\Longleftrightarrow u=v$

(viii) $\forall(u,v)\in \mathrm{E}^2$*, il existe un unique vecteur tel que* w *tel que* $v=u+w$

1.1.2 Quelques exemples

Exemple 1.1.

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ *est un espace vectoriel, muni de l'addition et de la multiplication usuelles. On vérifie sans difficulté les points de la définition 1.1. Le nombre nul de* $\mathbb{R}$ *est le nombre 0.*

Exemple 1.2.

Le plan vectoriel, noté $\mathbb{R}^2$*, est l'ensemble des couples* $x^T = (x_1, x_2)$ *où* $x_i \in \mathbb{R}$ *pour* $i = 1, 2$*.*
$\mathbb{R}^2$ *est un espace vectoriel si l'addition est défini par :*

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

et la multiplication par un scalaire par :

$$\alpha.x = \alpha.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$*.*
L'élément neutre de l'addition (vecteur nul) est la matrice-colonne dont les deux éléments sont égaux à 0.

Exemple 1.3.

Cet exemple a pour seul objet d'attirer l'attention sur le fait que les espaces vectoriels sont des structures très générales et peuvent caractériser des ensembles d'objets mathématiques n'ayant qu'un rapport lointain avec l'intuition géométrique de la notion de vecteur.
Soit $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ *l'ensemble des applications définies sur* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *;* $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ *est un espace vectoriel s i on définit l'addition des applications et des multiplications par un scalaire par :*

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u)$$

$$(\alpha.f)(u) = \alpha f(u)$$

pour tout couple $(f, g) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ *et tout vecteur* $u \in \mathbb{R}^n$*.*
Bien que ces définitions de la somme de deux applications et de la multiplication par un nombre réel restent intuitives, l'espace $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ *est beaucoup plus complexe que l'espace* $\mathbb{R}^n$

lui même. En particulier, un vecteur $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ ne peut pas, en général, être caractérisé par un nombre fini de coordonnées.

Théorème 1.1. *:* **Exemples :** *Les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels (suivant les cas), dits espaces vectoriels de référence.*

1. *les ensembles de n-uplets de réels $\mathbb{R}^n$,*
2. *les ensembles de fonctions définies sur I (éventuellement $\mathbb{R}$), à valeurs dans $\mathbb{R}$,*
3. *les ensembles de polynômes à coefficients réels : $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$,*
4. *les ensembles de suites réelles $\mathbb{R}^n$,*
5. *les ensembles de matrices carrées ou rectangles à coefficients réels : $\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_{(n,p)}$.*

Que se passe t-il quand on considère un sous-ensemble d'un espace vectoriel ?
Dans quelles conditions ce sous ensemble garde-t-il les propriétés de la définition 1.1 ?
La notion de sous-espace vectoriel permet de répondre à cette question.

1.2 Sous-Espaces Vectoriels

1.2.1 Définition

Définition 1.2. *Soit* E *un espace vectoriel et* F *un sous-ensemble non vide de* E*.* F *est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de* E *si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $v \in F$, $\alpha.v \in F$, et si les points 7. à 10. de la définition 1.1 sont vérifiés quand on remplace* E *par* F *dans leur formulation.*

✓ La Définition 1.2 a une expression relativement complexe mais sa signification est simple.
F est un sous-espace vectoriel de E si F est lui même un espace vectoriel muni de l'addition des vecteurs (dans F) et de la multiplication par un scalaire (le résultat $\alpha.v$ devant rester dans F si $v \in \mathrm{F}$).
On pourra alors vérifier la stabilité par la multiplication, i.e. $\forall v \in \mathrm{F}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha v \in \mathrm{F}$; ainsi que la stabilité par l'addition, i.e. $\forall (u, v) \in \mathrm{F}^2, u + v \in \mathrm{F}$.

✓ On donne ci-après un critère plus simple pour vérifier si un sous-ensemble d'un espace E est un sous-espace vectoriel. Il est parfois retenu comme définition d'un sous-espace vectoriel ; c'est pourquoi nous le présentons comme tel.

Définition 1.3. *Soit* E *un espace vectoriel et* F *un sous-ensemble* **non vide** *de* E. F *est un* **sous-espace vectoriel** *de* E *si et seulement si*

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \forall(u,v)\in\mathrm{F}^2,\quad \alpha.u+\beta.v\in\mathrm{F}$$

Exemple 1.4.

Soit $\mathrm{E}=\mathbb{R}^3$ *et* F_1 *un sous-ensemble de* E *défini par :*

$$\mathrm{F}_1=\Big\{x\in\mathrm{E}\ /\ x_1+x_2+x_3=0\Big\}$$

où[1] $x^T=(x_1,x_2,x_3)$.
Si deux vecteurs de F_1*, notés* x *et* y*, ont la somme de leurs composantes nulle, il en est de même pour* $z=\alpha x+\beta y$ *pour tout couple* (α,β).
En effet, on peut écrire :

$$z=\alpha x+\beta y=\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta y_1\\ \alpha x_2+\beta y_2\\ \alpha x_3+\beta y_3\end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}z_1+z_2+z_3&=\alpha x_1+\beta y_1+\alpha x_2+\beta y_2+\alpha x_3+\beta y_3\\&=\alpha(x_1+x_2+x_3)+\beta(y_1+y_2+y_3)\\&=\alpha\times 0+\beta\times 0=0\end{aligned}$$

Par conséquent, F_1 *est un sous-espace vectoriel de* E.

Exemple 1.5.

Le sous-ensemble $\{\mathbf{0}_\mathrm{E}\}=\{\mathbf{0}\}$ *réduit au vecteur nul est un sous-espace vectoriel de* E.
C'est le plus « petit » sous-espace vectoriel de E *et c'est le seul qui contienne un seul vecteur.*

1. x^T désigne la transposée de x. Un vecteur x de $\mathbb{R}^3$ étant une matrice-colonne, donc x^T est une matrice ligne.

✓ **Conséquence** : Une intersection de deux sous-espaces vectoriels de E va toujours contenir au moins le vecteur nul. En fait, on a le théorème plus générale suivant.

Proposition 1.1. *L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de* E *est un sous-espace vectoriel de* E.

Démonstration. Soient Fet G deux sous-espaces vectoriels de E.

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{F}\ \text{ s.e.v. de }\ \mathrm{E} \Longrightarrow \mathbf{0} \in \mathrm{F} \\ \mathrm{G}\ \text{ s.e.v. de }\ \mathrm{E} \Longrightarrow \mathbf{0} \in \mathrm{G}\end{array}\right\} \Longrightarrow \Big(\mathbf{0} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G} \Big)$$

Soient $u, v \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

On a :

$$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{F}\ \text{ s.e.v. de }\ \mathrm{E} \\ u, v \in \mathrm{F}\end{array}\right\} \Longrightarrow \Big(\alpha u + \beta v \in \mathrm{F} \Big) \text{car F est stable par combinaison linéaire}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{G}\ \text{ s.e.v. de }\ \mathrm{E} \\ u, v \in \mathrm{G}\end{array}\right\} \Longrightarrow \Big(\alpha u + \beta v \in \mathrm{G} \Big) \text{car G est stable par combinaison linéaire}$$

D'où $\alpha u + \beta v \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$. □

✓ Pour illustrer cette proposition, considérons le sous-espace F_2 défini par :

$$\mathrm{F}_2 = \Big\{ x \in \mathrm{E} \ / \ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \Big\} \tag{1}$$

et montrons que $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On utilise pour cela la définition 1.3. Si x et y appartiennent à $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2$ et si α, β sont deux réels, on a :

$$z = \alpha x + \beta y = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{pmatrix}$$

On a vu précédemment que la somme des composantes de z est nulle.

Considérons maintenant la relation caractéristique de F_2, à savoir :

$$z_1 - 2z_2 + 3z_3 = 0$$

et cherchons à vérifier si elle est satisfaite.

On peut écrire, après une mise en facteurs élémentaire :

$$z_1 - 2z_2 + 3z_3 = \alpha(x_1 - 2x_2 + 3x_3) + \beta(y_1 - 2y_2 + 3y_3)$$

Comme x et y sont dans F_2, on en déduit :

$$z_1 - 2z_2 + 3z_3 = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0$$

On a bien $z \in \mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2$.

✓ Montrons que, en revanche, $\mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel en choisissant $x \in \mathrm{F}_1$ et $y \in \mathrm{F}_2$ tels que $z = x + y \notin \mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2$.

Il suffit de considérer $x^T = (2, 1, -3) \in \mathrm{F}_1$ et $y^T = (-1, 1, 1) \in \mathrm{F}_2$. On a alors :

$$z = x + y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On vérifie immédiatement que z n'appartient ni à F_1 ni à F_2.

Remarque 1.5. *Ce second exemple montre qu'en général la réunion de deux s.e.v. n'est pas un s.e.v.*

1.2.2 Somme et Somme directe

Si on souhaite garder une structure d'espace vectoriel en ajoutant des vecteurs de deux sous-espaces différents, il faut définir de manière moins restrictive la « somme » de sous-espaces. Pour cela, considérons l'ensemble défini par :

$$\mathrm{F}_{12} = \left\{ z \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = x + y \ \text{ avec } \ x \in \mathrm{F}_1 \ \text{ et } \ y \in \mathrm{F}_2 \right\}$$

F_{12} est un s.e.v. de $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$. Cette remarque se généralise à la proposition suivante.

Proposition 1.2. *Soient $\mathrm{F}_1, ..., \mathrm{F}_k$ des s.e.v. d'un e.v. E , et soit F un ensemble défini par :*

$$\mathrm{F} = \left\{ x \in \mathrm{E} \ / \ \exists (\alpha_1, ..., \alpha_k) \in \mathbb{R}^k \ \textit{ et } \ u_1 \in \mathrm{F}_1, ..., u_k \in \mathrm{F}_k \ \textit{ tels que } \ x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \right\}$$

F *est un s.e.v. de* E*. On dit alors que* F *est la* **somme** *de* F_1*,* F_2*,...,* F_k*, et on note* $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 + ... + \mathrm{F}_k$.

Dans cette proposition, il n'est pas mentionné que les coefficients $\alpha_1, ..., \alpha_k$ et les vecteurs $u_1 \in \mathrm{F}_1, ..., u_k \in \mathrm{F}_k$ sont définis de manière unique pour x fixé, et c'est d'ailleurs faux en général. On peut construire un contre-exemple simple an supposant $\mathrm{F}_1 = \mathrm{F}_2$.

✓ Lorsque la décomposition est unique, on utilise une notion légèrement différente, indiquée ci-après.

Définition 1.4.

a) *On appelle* **somme directe** *de* $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 + ... + \mathrm{F}_k$ *le s.e.v. de* E*, lorsqu'il existe, tel que tout* x *de* F *se décompose de manière unique en* $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$ *où* $(\alpha_1, ..., \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ *et* $u_1 \in \mathrm{F}_1$*,...,*$u_k \in \mathrm{F}_k$*. On note alors :*

$$\mathrm{F} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{F}_i$$

b) *Si* E *est la somme directe de deux s.e.v.* F_1 *et* F_2*, on dit qu'ils sont* **supplémentaires***.*

La somme directe de s.e.v. n'existe pas toujours car la composition évoquée dans la définition n'est pas forcément unique.
L'intuition est que, dans ce dernier cas, les F_i ont des vecteurs en commun autres que les vecteurs $\mathbf{0}$. Cette intuition est formalisée par la proposition suivante.

Proposition 1.3. *Une condition nécessaire pour que la somme directe de* F_i *soit définie est que pour tout couple* (i, j)*,* $\mathrm{F}_i \cap \mathrm{F}_j = \{\mathbf{0}\}$*.*

Rappelons que comme tout espace vectoriel contient $\mathbf{0}$, et l'intersection de deux s.e.v. contient au moins ce vecteur.

1.2.3 Sous-espace vectoriel engendré

Définition 1.5. *Soit* $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$*. Le sous-espace vectoriel engendré par* F*, noté* $Vect(\mathrm{F})$*, est le plus petit des sous-espaces vectoriels de* E *contenant* F*.*

✓ Justification :
L'ensemble $\mathcal{E}$ des sous-espaces vectoriels de E contenant F n'est pas vide, puisqu'il contient E.

L'intersection $\bigcap_{X\in\mathcal{E}} X$ est un sous-espace vectoriel de Econtenant A, et est contenu dans chaque X de $\mathcal{E}$, c'est donc bien le plus petit des éléments de $\mathcal{E}$.

Proposition 1.4.

1. $Vect(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$
2. *Si* $u \in \mathrm{E}\backslash\{\mathbf{0}\}$, $Vect(\{u\}) = \{\lambda u,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, *noté aussi* $Vect(u)$.
3. F *est un sous-espace vectoriel de* E *si et seulement si* $Vect(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$.
4. *Si* F *est un sous-espace vectoriel de* E, *et si* $\mathrm{G} \subset \mathrm{F}$, *alors* $Vect(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F}$.
5. *Soient* F*et* G *deux s.e.v. Si* $\mathrm{G} \subset \mathrm{F}$, *alors* $Vect(\mathrm{G}) \subset Vect(\mathrm{F})$.
   En effet : si $\mathrm{G} \subset \mathrm{F} = Vect(\mathrm{F})$, *donc* $\mathrm{G} \subset Vect(\mathrm{F})$. *D'où* $Vect(\mathrm{G}) \subset Vect(\mathrm{F})$ *(d'après le point précédent).*

1.3 Base et Dimension d'un espace vectoriel

Dans l'Exemple 1.4, nous avons montré qu'à partir d'un certain nombre de vecteurs de référence (y^0 et les y^k, k=1,2), il était possible, par combinaison, de construire n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Il faut maintenant préciser ce qu'on entend par « combinaison » et spécifier les conditions dans lesquelles un sous vecteur permet d'obtenir tous les vecteurs de l'espace par combinaison.

1.3.1 Combinaisons linéaires et familles liées

Définition 1.6. *Soient* $u_1, u_2, ..., u_k$ *des vecteurs de* E *et* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ *des nombres réels. On appelle* **combinaison linéaire** *des* u_j *avec les coefficients* α_j *le vecteur* x *défini par :*

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j u_j$$

✓ Cette notion de combinaison linéaire est fondamentale car, comme nous l'avons vu dans l'Exemple 1.4 si les vecteurs u_j désignent des valeurs futures d'actifs financiers dans différents états de la nature, le vecteurs x représente les valeurs du portefeuille contenant α_j, pour $j = 1, ..., k$.

Nous reproduisons au Tableau 1 les données correspondantes au model compensatoire linéaire dans lequel un consommateur donne des notes à des ordinateurs portables sur différents attributs (quatre attributs dans cet exemple) et affecte ensuite une note globale en pondérant les attributs.

TABLE 1 – Notes sur les attributs des quatre ordinateurs

ordinateur	puissance de calcul	performances graphiques	logiciels	prix
A	10	8	6	4
B	8	6	8	3
C	6	8	10	5
D	4	3	7	8

Le vecteur des poids accordés par le consommateur à ces attributs est défini par :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 40\% \\ 30\% \\ 20\% \\ 10\% \end{pmatrix}$$

Chaque attribut peut être vu comme un vecteur de $\mathbb{R}^4$ dont les composantes sont les notes des quatre ordinateurs.
On notera u_1, u_2, u_3, u_4 ces attributs pour *calcul*, *graphique*, *logiciel*, *prix*. Dans ce cadre, le vecteur des notes finales s'écrits comme la combinaison linéaire.

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4$$

On remarque que le vecteur final peut être obtenu en faisant le produit de la matrice (4,4) des notes par la matrice des poids α de dimensions (4,1), sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 4 \\ 8 & 6 & 8 & 3 \\ 6 & 8 & 10 & 5 \\ 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6.9 \\ 7.3 \\ 4.7 \end{pmatrix}$$

Il reste au consommateur à choisir l'ordinateur correspondant à la composante la plus élevée du vecteur des résultats, c'est à dire l'ordinateur A.

On comprend mieux pourquoi ce modèle est appelé compensatoire linéaire. Il y a, en effet, combinaison linéaire des attributs pour obtenir un vecteur de notes permettant de faire un choix.

✓ Plus généralement, la proposition suivante illustre l'importance de la notion de combinaison linéaire de vecteurs dans la construction d'un espace vectoriel.

Proposition 1.5. *Soient $u_1, u_2, ..., u_k$ des vecteurs de E et notons F l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs u_j, $j = 1, ..., k$, c'est à dire :*

$$\mathrm{F} = \left\{ x \in \mathrm{E} \ / \ \exists \alpha \in \mathbb{R}^k, \ x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j u_j \right\}$$

Alors, F est un s.e.v. de E.

Cette proposition n'est rien d'autre qu'un cas particulier de la Proposition 1.2 dans laquelle F_j serait l'espace vectoriel engendré par u_j.

Définition 1.7. *Soint $u_1, u_2, ..., u_k$ des vecteurs de E. Ils sont dits* **linéairement dépendants** *s'il existe des coefficients $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ avec $\alpha \neq 0$ tels que :*

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j u_j = 0 \tag{2}$$

On dit aussi que $u_1, u_2, ..., u_k$ est une **famille liée**.

✓ Cette définition traduit le fait qu'un quelconque u_j des k vecteurs peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres vecteurs. En effet, s'il existe un indice j tel que $\alpha_j \neq 0$, on peut écrire :

$$u_j = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} u_i$$

Remarque 1.6. *Si k vecteurs forment une famille liée (ils sont linéairement dépendants), on peut ajouter un nombre quelconque de vecteurs à cette famille, elle restera liée.*
En effet, il suffira d'affecter des coefficients nuls aux nouveaux vecteurs pour retrouver une relation comme celle de la définition précédente.

Exemple 1.6.

Considérons les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ *suivants :*

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces vecteurs sont liés par la relation $u_3 = -u_1 + u_2$.

Le vecteur u_3 *s'écrit ainsi comme combinaison linéaire de* u_1 *et* u_2 *et on a :*

$$-u_1 + u_2 - u_3 = 0$$

Cette famille est donc liée.

1.3.2 Combinaisons linéaires et familles libres, systèmes générateurs

Définition 1.8. *Soint* $u_1, u_2, ..., u_k$ *des vecteurs de* E. *Ils sont dits* **linéairement indépendants** *s'ils ne constituent pas une famille liée. On dit alors qu'il s'agit d'une* **famille libre**.

En d'autres termes, si $u_1, u_2, ..., u_k$ est une famille libre, on a l'implication

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j u_j = 0 \implies \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 0 \tag{3}$$

Remarque 1.7. *En particulier,* **deux vecteurs** u_1 *et* u_2 *sont* **linéairement indépendants** *s'il n'existe pas de réel* β *tel que* $u_2 = \beta u_1$, *c'est-à-dire* **si les deux vecteurs ne sont pas proportionnels**.

Exemple 1.7.

Soient u_1 *et* u_2 *les vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *définis par :*

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ces vecteurs sont linéairement indépendants. En effet, supposons qu'il existe deux réels non nuls α *et* β *tels que :*

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = 0$$

On peut alors écrire :

$$\alpha + 2\beta = 0$$

$$4\alpha + \beta = 0$$

$$2\alpha + 3\beta = 0$$

On déduit de la seconde équation que $\beta = -4\alpha$. En remplaçant β par sa valeur dans la première, on obtient $\alpha + 2(-4\alpha) = 0$, c'est à dire $\alpha = 0$ et cela implique, par l'une quelconque des trois équations, que $\beta = 0$. Ce résultat contredit l'hypothèse selon laquelle α et β sont non nuls.

On a, pour les familles libres, une propriété symétrique à celle mentionnée pour les familles liées.

Proposition 1.6. *Si k vecteurs forment une famille libre, un sous-ensemble quelconque de ces vecteurs est encore une famille libre.*

✓ Pour illustrer cette propriété, considérons k vecteurs $u_1, u_2, ..., u_k$ formant un famille libre $\mathcal{B}$ et supposons qu'il existe un sous-ensemble $\mathcal{B}^*$ de p vecteurs formant une famille liée. Pour simplifier, supposons que $\mathcal{B}^* = \{u_1, u_2, ..., u_p\}$. Il existe alors $\alpha \in \mathbb{R}^p, \alpha \neq 0$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i = 0$. En posant $\alpha_{p+1} = \alpha_{p+2} = ... = \alpha_k = 0$, on peut aussi écrire :

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i = 0$$

et les α_i ne sont pas tous nuls. Cette égalité contredit l'hypothèse selon laquelle $\mathcal{B}$ est une famille libre.

Définition 1.9. *Une famille $(u_1, u_2, ..., u_k)$ de vecteurs de* E *est appelée* **système générateur** *(ou* **famille génératrice***) si tout $x \in$ E s'écrit comme une combinaison linéaire de $(u_1, u_2, ..., u_k)$.*

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \ \exists \alpha \in \mathbb{R}^k \ \textit{ tel que } \quad x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j u_j$$

✓ Lorsqu'une famille $\mathcal{B}$ de vecteurs est un systéme de générateur d'un espace vectoriel E(on dit aussi que $\mathcal{B}$ engendre E), toute famille $\mathcal{B}^*$ qui contient $\mathcal{B}$ engendre aussi E. Cependant, si $\mathcal{B}^* \supset \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^* \neq \mathcal{B}$ alors $\mathcal{B}^*$ est forcément liée.

✓ Il est alors naturel de s'interroger sur la plus « petite » famille engendrant E, c'est-à-dire celle qui contient le moins d'éléments.

1.3.3 Bases

Définition 1.10. *Une famille $\mathcal{B}$ de vecteurs de* E *est une* **base** *de* E *si $\mathcal{B}$ est une famille libre et si elle engendre* E.

Lorsque $\mathcal{B}$ est liée et engendre E, on peut toujours, pour un vecteur x quelconque, trouver plusieurs combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{B}$ qui sont égales à x. En effet, supposons que :

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

avec $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$.

✓ Si $\mathcal{B}$ est liée, on peut par exemple écrire $u_1 = \sum_{i=2}^{n} \beta_i u_i$. En remplaçant u_i par sa valeur, on obtient :

$$x = \sum_{i=2}^{n} (\alpha_i + \alpha_1 \beta_i) u_i$$

ce qui donne une seconde combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$ égale à x.

✓ Dans le cas où $\mathcal{B}$ est libre, cette décomposition est unique, ce qui se traduit par la proposition suivante.

Proposition 1.7. *Une famille $\mathcal{B} = \{u_1, ..., u_n\}$ est une* **base** *d'un espace vectoriel* E *si et seulement si tout vecteur $x \in$ E s'écrit d'une* **manière unique** *comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. On a alors :*

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

et les α_i, sont appelés **coordonnées** *(ou* **composantes***) de x dans la base $\mathcal{B}$.*

✓ Chaque fois qu'on se donne une base $\mathcal{B}$ et un vecteur x, ce dernier est caractérisé par les coefficients $\alpha^T = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ tels que $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$.
Les coefficients $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ dépendent de la base choisie.

Exemple 1.8. $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$,

$X = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = xe_1 + ye_2$ *avec* $e_1 = (0, 1)$ $e_2 = (0, 1)$.

Tout élément de $\mathbb{R}^2$ est une combinaison linéaire de e_1 et e_2, i.e. $\{e_1, e_2\}$ est un système générateur.

Soit α_1, α_2 des réels. On a : $\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (0,0)$ c'est à dire $(\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$ donc $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Donc la famille $\{e_1, e_2\}$ est libre d' où $\{e_1, e_2\}$ est une base.

Exemple 1.9. $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$,

La base la plus « simple » de E *est appelée* **base canonique** *et notée $e_1, ..., e_n$ où ces vecteurs sont définis par :*

$$e_1 = (1, 0, ..., 0);\ e_2 = (0, 1, ..., 0);\ ...\ ;\ e_n = (0, 0, ..., 1)$$

Le vecteur e_i a toutes ses composantes nulles sauf la i-ième qui est égale à 1.

Par conséquent, pour tout vecteur $x^T = (x_1, ..., x_n)$, on a la décomposition suivante :

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$$

Remarque 1.8. *Soit $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ avec $x_i \in \mathbb{R}^n$. La partie A est libre si*

$$det(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0.$$

Voir plus tard, le chapitre sur le déterminant d'une matrice.

1.3.4 Dimension

Définition 1.11. *Un espace* E *est de* **dimension finie** *s'il possède un système générateur comptant un nombre fini de vecteurs. Dans ce cas, on appelle* **dimension** *de* E*, et on note dim(E), le nombre de vecteurs*[2] *d'une base de* E.

✓ Pour que cette définition caractérise sans ambiguïté la dimension, il faut que toutes les bases d'un espace de dimension finie comptent le même nombre de vecteurs, ce que précise la proposition suivante.

Proposition 1.8. *Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases d'un espace* E *de dimension finie. On a alors,*

$$Card(\mathcal{B}_1) = Card(\mathcal{B}_2)$$

2. Par convention, l'espace réduit au vecteur nul est de dimension égale à 0.

Exemple 1.10. *dim* $\mathbb{R}^n = n$

Théorème 1.2. *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *de dimension finie et* F *un sous-espace vectoriel de* E *avec* $\mathrm{F} \neq \mathrm{E}$*, alors :*

1. F *est de dimension finie.*
2. *dim* $\mathrm{F} \leq$ *dim* E.
3. *dim* $\mathrm{F} =$ *dim* E *alors* $\mathrm{E} = \mathrm{F}$.

Remarque 1.9. *Le seul espace vectoriel de dimension nulle est le singleton* $\{\vec{0}\}$.

Théorème 1.3. *Soient* E *et* F *des espaces vectoriels de dimensions finies alors*

$$dim(\mathrm{E} + \mathrm{F}) = dim\ \mathrm{E} + dim\ \mathrm{F} - dim(\mathrm{E} \cap \mathrm{F}).$$

Remarque 1.10. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie. Soit* A *une partie de* E *(notons que dim* $\mathrm{E} = n$*).*
Si card $A = n$ *et* A *est libre alors* A *est une base de* E.

Remarque 1.11. *La définition 1.11 montre qu'on ne peut identifier la dimension d'un e.v. avec le nombre de vecteurs d'un système générateur mais seulement avec le nombre de vecteurs d'une base (i.e. des vecteurs linéairement indépendants). Par conséquent, dans toute famille de vecteurs d'un espace* E *de dimension finie, il existe un nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants qui est, égal à la dimension de l'espace.*

Proposition 1.9. *Soit* $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ *une base de* E *et* x *un vecteur quelconque de* E*. Alors, la famille* $\mathcal{B}_x = (u_1, ..., u_n, x)$ *est liée.*

✓ En effet, x se décompose de manière unique sous la forme $\sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ puisque $\mathcal{B}$ est une base. Par conséquent, on peut trouver $(\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1})$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i + \alpha_{n+1} x = 0$$

Il suffit de choisir $\alpha_i = x_i$ et $\alpha_{n+1} = -1$, et la définition 1.7 implique que $\mathcal{B}_x$ est liée.

1.3.5 Rang

Définition 1.12. *Soit $\mathcal{B}$ une famille de vecteurs de* E. *On appelle* **rang** *de $\mathcal{B}$ et on note $rg(\mathcal{B})$ le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants de $\mathcal{B}$.*

✓ Dans la proposition 1.5, nous avons montré que l'ensemble des combinaisons linéaires d'un ensemble de vecteurs de E formait un s.e.v. de E.
✓ De plus, on ne modifie pas $rg(\mathcal{B})$ en ajoutant à $\mathcal{B}$ un vecteur combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.
Par conséquent, on a la proposition suivante.

Théorème 1.4.

1) Soit $\mathcal{B}$ une famille de vecteurs de E. *L'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathcal{B}$ est un s.e.v. (noté* F*) de dimension $p = rg(\mathcal{B})$.*

2) Soit v un vecteur qui ne s'écrit pas comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. On a alors :

$$rg(\mathcal{B} \bigcup \{v\}) = rg(\mathcal{B}) + 1$$

Démonstration. Le point 1) de cette proposition résulte directement de la définition du rang de $\mathcal{B}$.
Notons G l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathcal{B} \bigcup \{v\}$. Par le point 1), on sait que $dim(G) = rg(\mathcal{B} \bigcup \{v\})$. Or, il existe une famille $u_1, u_2, ..., u_n$ de vecteurs linéairement indépendants dans $\mathcal{B}$. La famille $\{u_1, u_2, ..., u_p, v\}$ est libre et donc $dim(G) = p + 1$. □

2 MATRICES

Dans ce chapitre, on définit formellement les matrices et les différentes formes qu'elles peuvent prendre. Nous précisons les règles élémentaires de calcul, à savoir l'addition de deux matrices et la multiplication d'une matrice par un nombre réel. Nous abordons aussi le déterminant et l'inverse d'une matrice carrée.

2.1 Généralités

2.1.1 Définitions

On appelle matrice à coefficients réels, tout tableau ayant n lignes et m colonnes de la forme

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Une telle matrice est dite matrice de $m \geq 1$ lignes et de $n \geq 1$ colonnes et l'ensemble des matrices de m lignes et n colonnes de scalaires de $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Exemple 2.1.

$$A = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R}); \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R}); \quad D = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$$

Pour cette dernière matrice, nous pouvons la noter $D = (d_{ij})_{1 \leq i \leq 3,\, 1 \leq j \leq 4}$.
Nous avons alors l'identification :

$$\left\{ \begin{array}{llll} d_{11} = 8, & d_{12} = 2, & d_{13} = 1, & d_{14} = 0 \\ d_{21} = 5, & d_{22} = 0, & d_{23} = -1, & d_{24} = 3 \\ d_{31} = 7, & d_{32} = 4, & d_{33} = -1, & d_{34} = 0 \end{array} \right\}$$

✓ L'exemple ci-dessus donne une illustration sur l'importance du calcul matriciel en économie et en gestion, qui fait l'objet du présent chapitre.

Exemple 2.2. *Un hypermarché commercialise quatre marque de yaourts (qu'on numérotera 1,2,3 et 4) et a réalisé une enquête auprès de ses clients pour analyser la fidélité à la marque. Les interviewés étaient interrogés juste après avoir pris de yaourts dans le rayon et*

répondaient à la question suivante : « Quelle marque aviez vous choisi la dernière fois que vous avez acheté des yaourts ? » L'enquêteur notait la marque achetée le jour de l'enquête et celle annoncée par le client et correspondant à l'achat précédent.
Les résultats de l'enquête peuvent être résumés dans une matrice M de dimensions (4,4) dans laquelle le ligne i donne la répartition des acheteurs de la marque i qui avaient choisi les marques $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ *lors de leur précédent achat.*
Si on note m_{ij} *le terme de la matrice M figurant à la i-iéme ligne et la j-ième colonne,* m_{ij} *indique donc la proportion d'acheteurs qui, achetant la marque i aujourd'hui avaient acheté la marque j la fois précédente. Les résultats sont synthétisés dans la matrice (4,4) suivante :*

$$M = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.05 & 0.05 \\ 0.03 & 0.85 & 0.04 & 0.08 \\ 0.12 & 0.04 & 0.78 & 0.06 \\ 0.09 & 0.03 & 0.05 & 0.83 \end{bmatrix}$$

Par exemple $m_{12} = 0.1$ *signifie que parmi les acheteurs de la marque A, 10% d'entre eux avaient acheté la marque B la fois précédente. La somme des termes de chaque ligne i est égale à 1, c'est-à-dire 100% des acheteurs de la marque i.*
Il s'agit d'un exemple simplifié car on ajoute en général une possibilité de réponse « Autre» pour tenir compte du cas où l'acheteur avait choisi une autre marque que les quatre proposées lors de son dernier achat, ou éventuellement pour faire face au cas de l'acheteur qui achète des yaourts pour la première fois !

Cet exemple montre que le concept de matrice, ou simplement de tableau de données, intervient naturellement dans les études économiques et/ou statistiques. Dans le cas de l'hypermarché, ou pourra chercher à déterminer les parts de marché d'équilibre des quatre marques en supposant une certaine stabilité des comportements dans le temps (ou plus précisément une stabilité des comportements de changement de marque dans le temps) ; la problématique est comparable à celle de notation des entreprises.

2.1.2 Matrices nulles

La matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls est appelée matrice nulle de m lignes et de n colonnes.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

2.1.3 Matrices colonnes

Dans toute la suite, nous appelons une matrice d'une seule colonne de la forme

$$M = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$$

sous le nom de matrice colonne et l'ensemble de ces matrices est notée

$$\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^m$$

2.1.4 Matrices lignes

Une matrice d'une seule ligne est dite matrice ligne et est de la forme

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1,m}$$

2.1.5 Matrice carrée

Une matrice $\mathcal{M}$ est carrée si $m = n$, c'est à dire qu'elle a le même nombre de lignes et de colonnes.

✓ L'ensemble des matrices carrées de n lignes et de n colonnes est dite matrice carrée d'ordre n.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Remarque 2.1. *Les matrices carrées d'odre n possèdent plusieurs subdivisions.*

2.1.6 Matrices triangulaires

D'abord, il faut définir la diagonale d'une matrice carrée, constituée des termes de la forme $a_{ii},\ _{1 \leq i \leq n}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Tous les éléments au dessus de la diagonale définissent la sur-diagonale, c'est à dire les éléments se situant à la ligne i et la colonne j avec $j \geq i$.
Tous les éléments en dessous de la diagonale définissent la sous-diagonale, c'est à dire les éléments se situant à la ligne i et la colonne j avec $j \leq i$.

Définition 2.1. *Une matrice est dite triangulaire si tous les termes de la surdiagonale sont nuls, ou tous les termes de la sous-diagonale sont nuls. Elle est dite triangulaire supérieure si tous les termes de la sous-diagonale sont nuls, triangulaire inférieure si tous les termes de la sur-diagonale sont nuls.*

✓ Donnons les deux exemples de matrices triangulaires, la première inférieure et la deuxième supérieure.

Exemple 2.3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad et \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2.1.7 Matrice diagonale

Il s'agit d'une matrice carrée dont tous les termes non diagonaux sont nuls. Ou encore, il s'agit d'une matrice carrée à la fois triangulaire supérieure et inférieure. Dans ce cas, on peut se contenter de citer seulement la diagonale :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

La notation $diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ veut dire qu'il s'agit d'une matrice diagonale et que la diagonale contient les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.
On utilise le symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si i=j ;} \\ 0, & \text{si i} \neq \text{ j.} \end{cases}$$

pour représenter une matrice diagonale ainsi

$$\Lambda = diag(\lambda_i \delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

Ainsi, si $i = j$, le terme diagonal est λ_i, sinon, il est nul, car le symbole de Kronecker est nul.

2.1.8 Matrice Identité

Parmi les matrices diagonales, on peut remarquer celle dont les termes diagonaux sont tous égaux à l'unité de $\mathbb{R}$. On l'appelle matrice identité d'ordre n. Nous expliquerons plus tard, pour quoi cette appellation. Nous la notons :

$$I_n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = (\delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

Exemple 2.4.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad et \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.9 Matrice transposée

Notations : Nous noterons une matrice avec une lettre capitale A, B, C etc. Pour une matrice A par exemple, le terme d'ordre i et j sera notée avec la lettre minuscule a_{ij} . Ainsi nous écrirons

$$A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$$

Nous pouvons aussi noter le terme ij par $(A)_{ij}$ pour avoir

$$A = ((A)_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}$$

Nous pouvons aussi considérer A comme un ensemble de n colonnes ainsi

$$A = [A^1, A^2, ..., A^j, ..., A^n]$$

avec la j-ième colonne étant

$$A^j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons aussi considérer A comme un ensemble de m lignes ainsi

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

avec la i-ième ligne étant

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$$

✓ Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = [A^1, A^2, ..., A^j, ..., A^n]$, une matrice de m lignes et de n colonnes.

Définition 2.2. *On appelle matrice transposée de A, notée A^t la matrice de n lignes et de m colonnes dont les lignes sont les colonnes de A, ou dont les colonnes sont les lignes de A.*

Chacune des formules ci-dessus définit la transposée de A.

$$A^t \in \mathcal{M}_{n,m}; \quad (A^t)_{ji} = (a_{ji}), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

ou

$$A^t = [(A^t)^1, (A^t)^2, ..., (A^t)^j, ..., (A^t)^n]$$

ou

$$A^t = \begin{bmatrix} (A_1)^t \\ (A_2)^t \\ \vdots \\ (A_m)^t \end{bmatrix}$$

Exemple 2.5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 4 & 5 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

2.1.10 Matrice symétrique

Définition 2.3. *Une matrice carrée est dite symétrique A si elle est sa propre transposée, c'est à dire $A^t = A$*

Exemple 2.6.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.11 Trace d'une matrice

Définition 2.4. *On appelle trace d'une matrice carrée A de dimension n la somme de ses termes diagonaux qu'on note $Tr(A)$.*

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Les propriétés essentielles de la trace d'une matrice sont résumées dans la proposition suivante.

Proposition 2.1. *Soient A et B deux matrices carrées de dimension n et $c \in \mathbb{R}$. On a :*

$$Tr(cA + B) = cTr(A) + Tr(B)$$

$$Tr(AB) = Tr(BA)$$

2.1.12 Concaténation de deux matrices

Définition 2.5. *1. Soient A et B deux matrices de n lignes, comptant respectivement p et m colonnes. On appelle matrice concaténée de A et B, la matrice C (notée aussi $\left[A/B\right]$) de dimensions (n,m+p) définie par :*

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} & b_{21} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} & b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

2. Soient A et B deux matrices à p colonnes, comptant respectivement n et k lignes. On appelle matrice concaténée de A et B, la matrice D (notée aussi $\left[\frac{A}{B}\right]$) de dimensions (n+k,p) définie par :

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \\ b_{11} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kp} \end{bmatrix}$$

Comme nous allons le voir dans le chapitre sur les Systèmes Linéaires, la concaténation de matrices est utilisée, entre autres, pour simplifier la formulation de transformations matricielles dans le cadre de la résolution de systèmes linéaires d'équations.

2.2 Opérations sur les matrices

On peut définir sur les matrices trois opérations :
- la somme de deux matrices de même type,
- le produit extérieur d'une matrice par un scalaire,
- le produit de deux matrices conformes.

2.2.1 Somme de matrices

Deux matrices sont de même type lorsqu'elles ont le même ensemble de scalaires, le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.
Soit alors A et B deux matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$, de même lignes (m) et de même colonnes (n), i.e. $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}$.
On définit la matrice $A + B$, somme de A et B, comme la matrice de m lignes et de n colonnes dont le terme (i, j) est la somme des deux termes (i, j) de A et de B. On note ainsi :

$$A + B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\;\; (A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Exemple 2.7.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 20 & 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 & -6 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 21 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Proposition 2.2.

1. **Associativité** *: l'opération + est associative dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, c'est à dire*
   $\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})^3, \quad (A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
2. **Commutativité** *: $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})^2, \quad A + B = B + A$*
3. **Élément nul** *: soit la matrice $O \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont tous les termes sont nuls, c'est à dire : $O_{ij} = 0$, $\forall\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Il est évident qu'on a :*

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad A + O = O + A = A$$

car

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), (A+O)_{ij} = (A)_{ij} + O_{ij} = (A)_{ij}, (O+A)_{ij} = O_{ij} + (A)_{ij} = (A)_{ij}$$

si bien que O est un élément neutre de l'addition.

4. **Opposé** *: tout élément de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ admet un opposé. En effet soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Définissons la matrice $-A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ par*

$$(-A)_{ij} = -a_{ij}$$

Nous avons clairement

$$(A + (-A))_{ij} = a_{ij} + (-a_{ij}) = 0$$

2.2.2 Multiplication externe

Soit λ un scalaire, c'est à dire, un élément de $\mathbb{R}$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Définissons la matrice $\lambda.A$ notée aussi λA dont les termes sont ceux de A multipliés par λ, c'est à dire $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Exemple 2.8.

$$2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 20 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 40 & 10 & -4 \end{bmatrix}$$

Proposition 2.3.

1. *L'élément unité de $\mathbb{R}$, noté $1_{\mathbb{R}}$, laisse invariantes les matrices, c'est à dire : $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), 1_{\mathbb{R}}.A = A$ car $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), (1_{\mathbb{R}}.A)_{ij} = 1_{\mathbb{R}}.(A)_{ij} = (A)_{ij}$*

2. *L'élément nul de $\mathbb{R}$ est un élément absorbant, c'est à dire*

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), 0_{\mathbb{R}}.A = O \text{ (O étant la matrice nulle)}$$

car

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), (0_{\mathbb{R}}.A)_{ij} = 0_{\mathbb{R}}.(A)_{ij} = 0$$

3. *On a aussi*

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), -1_{\mathbb{R}}.A = -A$$

c'est à dire que : la multiplication d'une matrice par l'opposé de l'élément unité de $\mathbb{R}$ donne l'opposée de la matrice dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, car

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), (-1_{\mathbb{R}}.A)_{ij} = -1_{\mathbb{R}}.a_{ij}$$

Mais aussi, on a :

$$0.a_{ij} = (1_{\mathbb{R}} + (-1_{\mathbb{R}}))a_{ij} = 1_{\mathbb{R}}a_{ij} + (-1_{\mathbb{R}}a_{ij}) = a_{ij} + (-1_{\mathbb{R}}a_{ij})$$

d'où

$$(-1_{\mathbb{R}}a_{ij}) = -a_{ij}$$

et

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), (-1_{\mathbb{R}}.A)_{ij} = -a_{ij} = (-A)_{ij}$$

4. *La multiplication externe est distributive par rapport à l'addition sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, c'est à dire*

   $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall(A, B) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})^2, \;\; (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \;\; \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$

   On a aussi : $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A.$

✓ L'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ muni de l'addition interne $(+)$ et de la multiplication externe $(.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2.2.3 Produit de matrices

On ne peut définir le produit de matrices que lorsqu'elles sont conformes. Deux matrices A et B sont conformes si le nombre de colonnes de A égale au nombre de lignes de B. Les éléments de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et ceux de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ sont conformes.

Définition 2.6. *On Définit le produit d'une matrice ligne X de n colonnes et d'une matrice colonne Y de n lignes*

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n], \;\; Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

par $XY = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$

Exemple 2.9.

$$[1 \quad -2 \quad 4]\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = (1 \times 0) + (-2 \times 4) + (4 \times 3) = 4$$

Exemple 2.10. Valorisation d'un portefeuille.

Le tableau suivant montre les cours hebdomadaires de clôture de quatre titres (Tigo, Orange, TFM TV, Sénélec) cotés à la Bourse de Paris pendant cinq semaines successives (du 2 au 30 Janvier 2010).

Un investisseur possède un portefeuille Q qu'on écrira sous la forme d'une matrice à quatre lignes et une colonne :

$$Q = \begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \\ 100 \\ 800 \end{pmatrix}$$

Chacun des nombres correspondant à la quantité de titres détenue pour chacun des quatre titres.

TABLE 2 – Cours de clôture de quatre titres

Date	Tigo	Orange	TFM TV	Sénélec
02/01	11.45	21.87	20.31	33.3
09/01	11.05	19.51	20.75	34.55
16/01	10.58	18.68	20.52	36.65
23/01	10.99	19.29	19.69	36.43
30/01	11.56	18.14	19.83	36.55

Cet investisseur souhaite suivre l'évolution de la valeur de son portefeuille pendant ce mois de Janvier 2010. La réponse est assez naturelle ; il suffit de multiplier, pour chaque titre, la quantité détenue par le prix et d'ajouter les quatre valeurs détenues.

• *Le 2 janvier, la valeur du portefeuille s'écrit comme le produit de deux matrices A_1 et Q, avec $A_1 = [11.45 \;\; 21.87 \;\; 20.31 \;\; 33.3]$ (matrice ligne).*

On obtient : $A_1 Q = 11.45 \times 1000 + 21.87 \times 500 + 20.31 \times 100 + 33.3 \times 800 = 51056$ *euros.*

• *Le 9 janvier, la valeur du portefeuille s'écrit comme le produit de deux matrices A_2 et Q, avec $A_2 = [11.05\ \ 19.51\ \ 20.75\ \ 34.55]$.*

On obtient : $A_2Q = 11.05 \times 1000 + 19.51 \times 500 + 20.75 \times 100 + 34.55 \times 800 = 51106$ *euros.*

• *On procéde de la même façon pour les 16, 23 et 30 Janvier.*

On voit alors que la valeur du portefeuille à chaque date résulte du même calcul, réalisé en multipliant les quantités par les prix de la date correspondante. Dans cet exemple, on multiplie une matrice à quatre lignes par une matrice à quatre colonnes.

• Il apparait que ce mode de calcul peut répondre à de nombreuses problématiques concrètes et justifie l'importance du calcul matriciel en économie et en gestion, qui fait l'objet du présent chapitre.

✓ Nous pouvons maintenant définir le produit quelconque de matrices conformes.

Définition 2.7. *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice de m lignes et de n colonnes et $B \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ une matrice de n lignes et de k colonnes, alors le produit AB est une matrice de m lignes et de k colonnes selon le shéma suivant*

$$A_{(m,n)} \times B_{(n,k)} = C_{(m,k)}$$

dont le terme (i,j) est le produit de la i-ième ligne de A par la j-ième colonne de B, c'est-à-dire

$$C = AB \in \mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{R}), \quad C_{ij} = (AB)_{ij} = A_iB^j$$

avec

$$A_iB^j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$$

Exemple 2.11.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -9 & -7 \\ 7 & -7 \end{bmatrix}$$

Remarque 2.2.

1. *Le produit de matrices est associatif, en ce sens que*

$$(A_{(m,n)} \times B_{(n,k)}) \times C_{(k,p)} = A_{(m,n)} \times (B_{(n,k)} \times C_{(k,p)})$$

2. *Une matrice nulle est absorbante, c'est à dire, que si O est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{R})$, alors pour toute matrice A qui lui est conforme, c'est à dire, ayant k colonnes, on a $O \times A = O$.*

Exemple 2.12. *Lorsqu'un jury de semestre se réunit, il accorde ou non le semestre en fonction de la moyenne obtenue par chaque étudiant sur l'ensemble des UE (Unité d'Enseignement). Supposons qu'il y ait (pour simplifier) quatre UE et six étudiants. Les notes sont reportées dans le tableau. Les UE ont des coefficients respectifs égaux à 3,5,2 et 3. Ce qui fait un total des coefficients égale à 13. Comment calcule t-on la liste des moyennes des étudiants ?*
Ce calcul s'opère en deux temps. On fait d'abords la somme des notes coefficientées, ce qui revient à faire le produit de la matrice des notes, notée M, par la matrice-colonne des coefficients, notée C. On a : $C = [3, \ 5, \ 2, \ 3]$. Le produit de la matrice des notes M par

Table 3 – Récapulatif des notes

	UE 1	**UE 2**	**UE 3**	**UE 4**
Étudiant 1	6	5	7	8
Étudiant 2	13	10	14	11
Étudiant 3	12	9	11	10
Étudiant 4	8	11	9	11
Étudiant 5	16	14	15	13
Étudiant 6	9	13	8	12

la matrice-colonne des coefficients C donne :

$$MC = \begin{pmatrix} 81 \\ 150 \\ 133 \\ 130 \\ 187 \\ 144 \end{pmatrix}$$

Dans un second temps, il reste à diviser cette matrice par la somme des coefficients, ce qui revient à multiplier MC par l'inverse de la somme des coefficients.
La matrice-colonne des moyennes s'écrit donc :

$$\frac{1}{13} = \begin{pmatrix} 81 \\ 150 \\ 133 \\ 130 \\ 187 \\ 144 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.23 \\ 11.54 \\ 10.23 \\ 10 \\ 14.39 \\ 11.08 \end{pmatrix}$$

Il est clair qu'avec trois cents, ou cinq cent ou plus de mille étudiants, ces calculs matriciels sont réalisés sur un tableur, comme Excel par exemple.
Cet exemple, fait intervenir deux opérations matricielles : le produit de deux matrices (notes et coefficients) et le produit d'une matrice par un nombre réel (l'inverse de la somme des coefficients).

2.2.4 Quelques exercices

Exercice 2.1. *Soient les matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

1. *Calculer A+B, 3B, 2A+B, B-A.*
2. *Donner* A^t *et* B^t.

Exercice 2.2. *Soit les vecteurs* $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

et les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 10 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 1 \\ 3 & 20 & 30 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 10 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer :*
   (a) $u = 3x + (\frac{1}{2})y - z$.
   (b) $5(x - y) + (\frac{1}{3})z$.
2. *Parmi les opérations suivantes, mettre en évidence et effectuer celles qui sont possibles :* $Ax, By, Cy, Cz + BAx, BC, CA^tetCA$.

Exercice 2.3. 1. *Soit la matrice carrée* M *d'ordre 2 avec* $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

   (a) *Calculer* M^2. *Vérifier que* $M^2 = \lambda M$. *Déterminer* λ.
   (b) *Calculer* M^3 *et* M^4 *en fonction de* M *et* λ.
   (c) *Soit* n *un entier quelconque. Déduire de (b) l'expression de* M^n *en fonction de* M, λ *et* n.
   (d) *Démontrer par récurrence la relation établie sous (c).*

2. *Soit la matrice* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
   Déterminer la famille de matrice X telles que le produit MX soit une matrice diagonale.

2.3 Déterminant et inverse d'une matrice

Le concept de déterminant est un outil mathématique qui sert essentiellement à étudier l'indépendance linéaire d'un ensemble de vecteurs et à calculer pratiquement l'inverse d'une matrice.

2.3.1 Les déterminants d'ordre 2

Définition 2.8. *Soit A, une matrice carrée d'ordre 2 de la forme* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *Le déterminant de A, noté det(A) est égal au nombre :*

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Exemple 2.13. *Le déterminant de la matrice* $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ *est égal à* $3 \times 5 - 4 \times 1 = 11$.

Remarque 2.3. *Le déterminant d'une matrice A est une fonction des éléments de cette matrice. Il peut aussi être considéré comme une fonction de ses vecteurs colonnes, et dans ce cas on l'écrira* $det(A^1, A^2)$.

Remarque 2.4. *On note parfois det(A) sous la forme :*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

2.3.2 Les déterminants d'ordre 3

Le déterminant d'ordre 3 d'une matrice se défini à partir des déterminants d'ordre 2 de la matrice.

Définition 2.9. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de A est défini par la formule

$$det(A) = a_{11}det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

✓ En anticipant sur les déterminants d'ordre n, appelons A_{ij} la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A. On voit immédiatement que cette formule peut s'écrire :

$$det(A) = a_{11}det(A_{11}) - a_{12}det(A_{12}) + a_{13}det(A_{13})$$

Exemple 2.14. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Alors
$A_{11} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$
et

$$det(A) = 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= 1(24 - 8) - 5(0 - 2) + 3(0 - 8) = 16 + 10 - 24 = 2$$

✓ La formule que nous avons donnée dans l'exemple s'appelle le *développement du déterminant* de A par rapport à la premièere ligne. **Cette formule n'est cependant pas unique**.
On vérifie aisément que la formule

$$det(A) = a_{13}det(A_{13}) - a_{23}det(A_{23}) + a_{33}det(A_{33})$$

donne exactement le même résultat. Cette formule correspond au développement du déterminant de A par rapport è la troisième colonne.

✓ En fait le déterminant d'une matrice peut se calculer en développant par rapport à n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne de la matrice. La seule précaution à prendre est d'affecter le signe correct à chaque terme du développement : de manière générale, le signe du terme correspondant à l'élément i, j est celui de $(-1)^{i+j}$.

✓ Ainsi le développement de A par rapport à sa deuxième colonne :

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

est de la forme :

$$\begin{aligned} det(A) &= (-1)^{1+2}a_{12}det(A_{12}) + (-1)^{2+2}a_{22}det(A_{22}) + (-1)^{3+2}a_{32}det(A_{32}) \\ &= -a_{12}det(A_{12}) + a_{22}det(A_{22}) - a_{32}det(A_{32}) \end{aligned}$$

✓ **Méthode de Sarius**

Exemple 2.15. *Calculer le déterminant de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *par la méthode de Sarius.*

$det(A) = \left| \begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

$det(A) = [(1\times -3\times 2)+(-1\times 0\times 1)+(1\times 2\times 1)]-[(1\times -3\times 1)+(1\times 0\times 1)+(2\times 2\times 1)]$

$det(A) = (-6+0+2) - (-3+0+4) = (-4) - (-7) = 3$

2.3.3 Les déterminants d'ordre n

Définition 2.10. *Le mineur* $|A_{ij}|$ *de l'élément* a_{ij} *de la matrice* A *est le déterminant de la matrice* A_{ij}*, obtenue en supprimant la* i^e *ligne et la* j^e *colonne de* A.
Le cofacteur A_{ij} *de l'élément* a_{ij} *de la matrice* A *est égal à* $(-1)^{i+j}$ *fois le mineur de* a_{ij} *:*

$$\mathrm{A}_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

Exemple 2.16. $|A_{23}| = det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

On obtient : $\mathrm{A}_{23} = (-1)^{2+3}|A_{23}| = -det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

Remarque 2.5. *1. On appelle parfois le cofacteur* A_{ij} *le mineur signé de* a_{ij}.
A l'aide de ces définitions, on retrouve immédiatement le déterminant d'ordre 3 qui, développé selon la première ligne, s'écrit :

$$a_{11}\mathrm{A}_{11} + a_{12}\mathrm{A}_{12} + a_{13}\mathrm{A}_{13} = a_{11}(-1)^{1+1}|A_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2}|A_{12}| + a_{13}(-1)^{1+3}|A_{13}|$$
$$= a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|$$

2. De la même façon, le développement d'ordre 3 est définit à partir des déterminants d'ordre 2, le déterminant d'ordre n est défini à partir des déterminants d'ordre $n-1$.

Définition 2.11. *1. Le développement par rapport à la i^e ligne du déterminant de la matrice A est donné par la formule :*

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{A}_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|, \quad i \text{ étant fixé}$$

2. Le développement par rapport à la j^e ligne du déterminant de la matrice A est donné par la formule :

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathrm{A}_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|, \quad j \text{ étant fixé}$$

Exemple 2.17. *Calculons le déterminant de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Comme la 2^{ieme} ligne comporte deux élément nuls, nous développons det(A) par rapport à cette ligne. On obtient :

$$det(A) = 4\mathrm{A}_{21} + 5\mathrm{A}_{23}$$
$$= 4(-1)^{2+1}|A_{21}| + 5(-1)^{2+3}|A_{23}|$$

Or

$$|A_{21}| = det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$
$$= 3(1\times 10 - 4\times 6) - 2(7\times 10 - 1\times 6) + 1(7\times 4 - 1\times 1)$$
$$= -143$$
$$|A_{23}| = det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$
$$= 1(7\times 10 - 1\times 6) - 2(3\times 10 - 1\times 1)$$
$$= 6$$

On a donc

$$\begin{aligned} det(A) &= 4(-1)(-143) + 5(-1)6 \\ &= 572 - 30 = 542 \end{aligned}$$

✓ **Quelques propriétés du déterminant d'ordre n**

1. Une matrice comportant une ligne (ou une colonne) de 0 a un déterminant nul.
2. Si une ligne (ou une colonne) d'une matrice est multipliée par une constante c, le déterminant est également multiplié par c.
3. La permutation de deux lignes ou de deux colonnes change uniquement le signe du déterminant.
$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -32 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 32.$
4. Une matrice qui a deux lignes ou deux colonnes identiques a un déterminant nul.
$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $det(A) = 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 0 - 0 + 0 = 0$
$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $det(B) = 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$
$$= 2 \times 5 - 3 \times 0 + 2 \times (-5) = 10 - 0 + 10 = 0$$
5. Le déterminant d'une matrice est nul si et seulement si les vecteurs colonnes (respectivement les vecteurs lignes) sont liés.
$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$, det(A)$=$ 48 - 48 $=$ 0, la deuxième colonne est le double de la première colonne.
$B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, det(B)$=$ 24 - 24 $=$ 0, la deuxième ligne est le double de la première ligne.
6. Si l'on ajoute à une colonne (respectivement à une ligne) un multiple scalaire d'une autre colonne (respectivement d'une autre ligne) on ne change pas le déterminant.

7. Le développement d'un déterminant selon une ligne en utilisant les cofacteurs d'une autre ligne donne zéro. En d'autres termes, une expression de la forme

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}$$

est nulle si $k \neq j$

8. Soit A une matrice carrée. Alors

$$det(A) = det(A^t)$$

9. Soit A et B deux matrices d'ordre n. Alors

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

10. Le déterminant d'une matrice diagonale d'ordre n est égale au produit des éléments de sa diagonale. i.e

$$D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$
$$det(D) = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j$$

11. Le déterminant d'une matrice triangulaire d'ordre n est égale au produit des éléments de sa diagonale.

2.3.4 L'inverse d'une matrice

L'inverse d'une matrice A d'ordre n est égal à une matrice B d'ordre n telle que $AB = BA = I$, notée A^{-1}.

✓ Méthode des cofacteurs

Définition 2.12. *La matrice adjointe d'une matrice carrée A, notée A^*, est la matrice transposée des cofacteurs de la matrice A :*

$$A^* = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{31} & \dots & \mathrm{A}_{n1} \\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{32} & \dots & \mathrm{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{A}_{1n} & \mathrm{A}_{2n} & \mathrm{A}_{3n} & \dots & \mathrm{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

en d'autres termes, l'élément générique i, j de A^* est le cofacteur A_{ji} (notez l'inverse des indices).

Théorème 2.1. *Soit A^* la matrice adjointe de A. Alors la relation suivante est vérifiée :*

$$AA^* = det(A).I$$

Théorème 2.2. *Soit A une matrice carrée, A^* sa matrice adjointe. Si $det(A) \neq 0$, alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} A^*$$

Corollaire 2.1. *Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$.*

✓ Démarche à suivre pour le calcul de l'inverse

Le calcul pratique de l'inverse d'une matrice A s'effectue de la façon suivante

1. Calculer det(A). Si det(A)=0, la matrice n'est pas inversible.
2. Remplacer chaque élément a_{ij} de A par le cofacteur qui lui est associé :
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$
3. Transposer la matrice ainsi obtenue pour obtenir la matrice adjointe :
$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$
4. Calculer A^{-1} à l'aide de la formule
$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} A^*$$
5. Vérifier l'égalité $AA^{-1} = I$.

Exemple 2.18. *Déterminer l'inverse de la matrice A par la méthode des cofacteurs, avec*
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. On a : det(A)=3 (déja calculé dans l'exemple 2.15). Le déterminant de A est différent de 0, donc A est inversible.

2. Calcul des cofacteurs, noté A' :

$$A' = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. $A^* = (A')^t = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

4. Calcul de A^{-1} à l'aide de la formule $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}A^*$. On a : $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

5. Vérification :

$$A * A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

✓ Calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot

En utilisant la méthode du pivot, déterminons l'inverse de la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1	-1	1	1	0	0	L_1
2	-3	0	0	1	0	L_2
1	1	2	0	0	1	L_3
1	-1	1	1	0	0	L'_1=L_1
0	-1	-2	-2	1	0	L'_2=L_2-2L_1
0	2	1	-1	0	1	L'_3=L_3-L_1
1	0	3	3	-1	0	L''_1=L'_1-L'_2
0	1	2	2	-1	0	L''_2=-L'_2
0	0	-3	-5	2	1	L''_3=L'_3+2L'_2
1	0	0	-2	1	1	L'''_1=L''_1+L''_3
0	1	0	-$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	L'''_2=L''_2+$\frac{2}{3}L''_3$
0	0	1	$\frac{5}{3}$	-$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	L'''_3=-$\frac{1}{3}L''_3$

On obtient : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

✓ **Retour sur déterminant : Le calcul du déterminant d'une matrice par la méthode du pivot**

Remarque 2.6. *On peut calculer le déterminant d'une matrice par la méthode du pivot. Pour le faire on procède de la même façon que pour le déterminant de l'inverse d'une matrice obtenu par le méthode du pivot.*

Le déterminant est donné par : $det(A) = (-1)^k \times p_1 \times p_2 ... \times p_n$
avec k le nombre d'interchangement de ligne, p_i désigne les pivots de la transformation des lignes à l'aide de la combinaison linéaire.

Illustration avec l'exemple précédent, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

On obtient : $det(A) = (-1)^0 \times 1 \times (-1) \times (-3) = 3$

L'exemple suivant donne une illustration sur l'importance des matrices en gestion et en économie.

Exemple 2.19. Proposer de nouveaux produits financiers à la clientèle.
Les obligations sont des titres de créance par lesquels l'entreprise émettrice emprunte de l'argent sur les marchés financiers. Les plus simples d'entre elle sont définies par un montant nominale (disons 100 euros), une durée de vie appelée maturité (3,5,7, 10 ans...ou plus), un taux d'intérêt (2%, 4%, etc.) aussi appelée « taux de coupon ». Le coupon (l'intérêt) est payé annuellement et, à l'échéance, le détenteur reçoit le dernier coupon et le prix de remboursement qu'on supposera ici égal au montant nominal.
Une obligation de maturité 3 ans, de taux d'intérêt 5% et de nominal 100 euros va engendrer pour le détenteur trois flux successifs égaux à 5 euros, 5 euros et 105 euros, reçus après un an, deux ans et trois ans.
Supposons que, sur un marché, trois obligations sont échangées. Les flux qu'elles engendrent sont résumés dans le tableau et la dernière ligne donne les prix auxquelles sont cotées ces obligations sur le marché. Cette présentation signifie que l'obligation OB1 a une durée

TABLE 4 – Flux de trois obligations

Date/Obligation	**OB1**	**OB2**	**OB3**
1	104	6	4
2	0	106	4
3	0	0	104
PRIX	99.5	100.4	99.6

de vie d'un an et un taux de coupon de 4%. Elle ne paye donc plus rien après la date 1. OB2 dure deux ans et paie un taux de coupon de 6% et enfin OB3 dure trois ans et paie 4%.
Une banque souhaite proposer à ses clients une gamme de produits financiers très simples qui permettent de s'assurer un revenu donné à une date future choisie, par exemple obtenir 100 euros à la date 2. Elle veut donc construire trois contrats C_1, C_2, C_3 tels que C_t donne 100 euros à la date t.
Le client achètera ces contrats sans se poser de questions sur leur construction « technique

» en supposant que la banque est capable de faire face à ses engagements. Cette dernière doit cependant répondre à deux questions :

1. *Comment faire pour satisfaire aux engagements futurs (payer les clients quand les contrats arriveront à échéance) ?*
2. *A quel prix faut il commercialiser ces contrats ?*

La réponse à ces deux questions est plus simple qu'il n'y paraît à première vue.

La banque va construire des portefeuilles à partir des obligations existantes de façon qu'ils dégagent des flux suffisants pour payer les clients. Le coût de ces portefeuilles donnera la réponse à la seconde question (hors bénéfice de la banque qui viendra s'ajouter à la « facture du client »).

1. *Notons M la matrice définie par :* $M = \begin{bmatrix} 104 & 6 & 4 \\ 0 & 106 & 4 \\ 0 & 0 & 104 \end{bmatrix}$

M correspond aux trois premières lignes du tableau où sont définis les flux payés par les différentes obligations. Si la banque achète trois obligations en nombre $x^T = (x_1, x_2, x_3)$ (matrice ligne), elle va recevoir la série de flux (produit de deux matrices) :

$$Mx = \begin{bmatrix} 104x_1 + 6x_2 + 4x_3 \\ 106x_2 + 4x3 \\ 104x_3 \end{bmatrix}$$

On voit alors qu'on peut choisir x tel que : $Mx = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}$ *ou y et z tel que :* $My = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}$ *et* $Mz = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

En d'autres termes, il existe des portefeuilles et des obligations cotées sur le marché qui engendrent les mêmes flux que les contrats que la banque souhaite créer. Ce qui vient *d'être fait peut être réécrit de manière concise sous la forme :*

$$\begin{bmatrix} 104 & 6 & 4 \\ 0 & 106 & 4 \\ 0 & 0 & 104 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} = 100 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\begin{bmatrix} 104 & 6 & 4 \\ 0 & 106 & 4 \\ 0 & 0 & 104 \end{bmatrix} \times \frac{1}{100} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

On remarque alors que trouver x, y et z revient alors à calculer la matrice inverse de M puisque :

$$\frac{1}{100} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = M^{-1} \iff 100M^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.962 & -0.054 & -0.035 \\ 0 & 0.943 & -0.036 \\ 0 & 0 & 0.962 \end{bmatrix}$$

NB : Le calcul de l'inverse de la matrice de M est laissé sous forme d'exercice.

On sait maintenant ce que faire la banque pour satisfaire à ses engagements. Par exemple, chaque fois qu'elle vend une unité de contrat C_2, elle doit acheter 0.943 unité de OB2 et vendre 0.054 de OB1.

2. *Comme on sait que la banque doit acheter ou vendre pour un unité de chaque contrat, on peut facilement déterminer ce qu'elle dépense dans ces différentes situations. Il suffit de faire le produit matriciel :*

$$\begin{bmatrix} 99.5 & 100.4 & 99.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.962 & -0.054 & -0.035 \\ 0 & 0.943 & -0.036 \\ 0 & 0 & 0.962 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 95.67 & 89.30 & 88.65 \end{bmatrix}$$

c'est à dire de multiplier les prix des obligations par les quantités à acheter pour chacun des contrats. En conséquence, la banque ne peut pas vendre le contrat C_1 à moins de 95.67, le contrat C_2 à moins de 89.30 et le contrat C_3 à moins de 88.65.

2.3.5 Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice noté $rg(A)$ est égale à la dimension de l'espace engendré par les vecteurs colonnes.

Exemple 2.20. *Déterminer le rang de la matrice A défini par* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

2	0	2	L_1
-2	3	-1	L_2
0	3	1	L_3
1	0	1	$L_1'=\frac{1}{2}L_1$
0	3	1	$L_2'=L_2+L_1$
0	3	1	$L_3'=L_3$
1	0	1	$L_1''=L_1'$
0	1	$\frac{1}{3}$	$L_2''=\frac{1}{3}L_2'$
0	0	0	$L_3''=L_3'-L_2'$

Il n'existe plus de transformation pouvant conduire des lignes dont tous les éléments sont nuls. Donc le rang de la matrice A est égale à 2, i.e. $rg(A) = 2$.

Par conséquent la matrice A n'est pas inversible.

2.3.6 Quelques exercices

Exercice 2.4. *Calculer les déterminants suivants :*

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 4 & -9 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

Exercice 2.5. 1. *Soit D une matrice diagonale d'ordre n. Que vaut $det(D)$?*

2. *Soit T une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) d'ordre n. Que vaut $det(T)$?*

Exercice 2.6. *Trouver les inverses des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.7. 1. *Vérifier que la matrice*

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

satisfait à l'équation suivante $A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0$

2. *En déduire qu'elle est inversible et obtenir son inverse grâce à l'équation précédente.(Ne pas calculer le déterminant !)*

Exercice 2.8. *Montrer que la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est inversible quelque soit le nombre $a \in \mathbb{R}$. Calculer A^{-1}.*

Exercice 2.9. *Calculer l'inverse de la matrice A par la méthode du pivot,* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.10. *Calculer le déterminant de la matrice A par la méthode du pivot,*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.11. *On considère les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 48 & 89 & 23 \\ 43 & 78 & 20 \\ 27 & 48 & 12 \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice X tel que $AXB = C$.

Références

[1] Roger P., *Mathématiques pour l'économie et la gestion. Application avec Excel*, Editeur : Pearson Education, France. Octobre 2006.

[2] Thiam M., *Cours d'Algébre, première année FASEG.*

[3] Aubonnet F., Guinin D., et Joppin B., *Précis de mathématiques : Algèbre 2. 2ème édition*, Editions Bréal, 1988.

[4] Bouzitat C., Pradel J., *Mathématiques : Fonctions de plusieurs varibles-Optimisation*, Editions Cujas.

[5] Calvo B., Doyen J., Calvo A., et Boschet F., *Exercices d'algèbre, 1er cycle, 2ème année*, Editions Armand Colin, Collection U 1984.

[6] Deschamps C., Ramis E., et Odoux J., Cours de mathématiques spéciales Tome 2 : Algèbre et applications à la géométrie.

[7] Ferrier O., *Maths pour économistes, l' Analyse en Economie, vol1, vol2,* Editions De Boeck Bruxelles, 2003.

[8] Lesieur L., Temam R., et Lefevre J., *Compléments d'algèbre linéaire, maths spéciales : 1ère et 2ème années*, Editions Armand Colin, Collection U 1978.

[9] Liret F., et Martinais D., *Mathématiques pour le DEUG, Algèbre et géométrie, 2ème année, Cours et exercices avec solutions,* Editions Dunod Paris, 1997.

[10] Michel P., *Cours de Mathématiques pour économistes,* Editions Economica,Paris, 1989.

[11] Pécastaings F., et Sevin J., *Chemins vers L'Algèbre. Tome 2 : Exercices avec solutions et rappels de cours,* Editions Vuibert, 1980.

[12] Rivaud J., *Algèbre linéaire. Tome 1 : Exercices avec solutions,* Editions Vuibert, 1978

[13] Seymour L., *Algèbre linéaire, cours et problèmes,* Serie Schaum.

[14] Sureau H., et Sureau Y., *Algèbre linéaire, DEUG scientifiques : 1ère et 2ème années,* Volumes 1 et 2, Editions Armand Colin, Collection Flash U– Séries mathématiques 1987.

[15] Varian Hal R., *Microecomics Analysis,* Editions W.W.Norton Company New York, 1992.

[16] Wade A., *Les mathématiques de l'analyse économique moderne,* Editions Economica, 2007.