Correction – France – juin 2000

Partie A : Pour tout $q \in [O; 6]$, $C_m(q) = 0,8 + 4(1 - 2q)e^{-2q}$

1. **Etude des variations et du signe de C_m sur [O; 6]**

   Pour tout réel q de [0; 6], on a : $C'_m(q) = 4[-2e^{-2q} + (1-2q)(-2e^{-2q})]$

   $$C'_m(q) = -8e^{-2q} - 8(1-2q)e^{-2q}$$
   $$C'_m(q) = -8e^{-2q}(2 - 2q)$$
   $$C'_m(q) = 16e^{-2q}(q - 1)$$

   Pour tout réel q, e^{-2q} strictement positif donc le signe de $C'_m(q)$ est celui de q - 1
   - si $q \in]0; 1[$, $q - 1 < 0$ donc $C'_m(q) < 0$ et la fonction C_m est strictement décroissante sur]0; 1 [
   - si q = 1, $C'_m(q) = 0$;
   - si $q \in]1 ; 6[$, $q - 1 > 0$ donc $C'_m(q) > 0$ et la fonction C_m est strictement croissante sur]1 ; 6[

   Le tableau de variation de Cm est

q	0	1	6
signe de $C'_m(q)$	-		+
C_m	4,8 ↘	$0,8 - 4e^{-2}$	↗ $C_m(6)$

   En x = 1, Cm admet un minimum absolu égal à $0,8 - 4e^{-2} \approx 0,26$.

   Pour tout réel *q* de [O; 6] on a $C_m(q) \geq C_m(1) > 0,2$

   Il en résulte que pour tout q de [0; 6], on a $C_m(q) > 0$

2. **Détermination de la fonction coût total**

   a . Soit g la fonction définie sur par $g(q) = 4qe^{-2q}$

   $$g'(q) = 4e^{-2q} + 4q(-2e^{-2q})$$
   $$g'(q) = 4(1-2q)e^{-2q}$$

   b. La fonction C_T admet pour fonction dérivée la fonction C_m. Donc C_T est une primitive de Cm sur [0; 6].

   C_m étant dérivable sur [O; 6], elle admet des primitives sur [0; 6] .

   $$C_m(q) = 0,8 + 4(1 - 2q)e^{-2q}$$
   $$C_m(q) = 0,8 + g'(q)$$
   $$C_T(q) = 0,8q + g(q) + k \; ; \; k \in \mathbb{R}$$

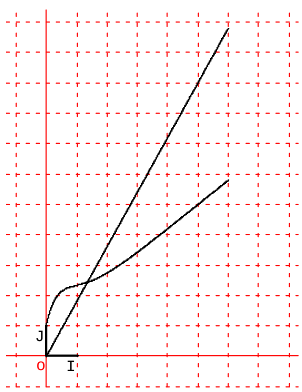
   Nous savons que $C_T(0) = 1$ donc $1 = g(0) + k$

   or $g(0) = 0$ donc $k = 1$ et $C_T(q) = 0,8q + 4qe^{-2q} + 1$

3. **a. Etude des variations de C_T**

   Nous savons que $C_T' = C_m$ et que pour tout q de [0; 6] , $C_m(q)$ est strictement positif donc la fonction C_T est strictement croissante sur [0; 6] .

   b. Représentation graphique de CT



Partie B

1. L'usine fabrique q litres de ce liquide dont le prix de vente est de 1,80 F par litre. La fabrication quotidienne étant vendue en totalité, la recette quotidienne R(q) est 1,8 q (en milliers de Francs) Elle est représentée par un segment porté par la droite d'équation y = 1,8q

   b. $B(q) = R(q) - C_T(q)$ donc $B(q) = 1,8q - 0,8q - 4qe^{-2q} - 1$

   $$\mathbf{B(q) = q - 1 - 4q\,e^{-2q}}$$

2. **Étude du signe de h(q)**

a. Pour tout q de [O; 6], $h(q) = 1{,}8 - C_m(q)$. On a donc, pour tout q de [0; 6] $h'(q)= -C_m'(q)$.
En utilisant les résultats du 1. on a :

- si $q \in\ ]0; 1[$, $C'_m(q) < 0$ donc $h'(q)>0$ et la fonction h(q) est strictement croissante sur]0; 1 [
- si q = 1, $C'_m(q) = 0$ donc $h'(q) = 0$
- si $q \in\ ]l ; 6[$, $C'_m(q) > 0$ donc $h'(q)<0$ et la fonction h(q) est strictement décroissante sur]l ; 6[

q	0		1		6
signe de h'		+		−	
h	-3	$\nearrow$	h(1)	$\searrow$	h(6)

avec $h(1) \approx 1{,}54$ et $h(6) \approx 1$

b. Montrons que l'équation h(q) = 0 admet une solution unique dans [0; 1]
Sur [0; 1], h est dérivable et strictement croissante. La restriction de h à[O; 1] est donc une bijection de [O; 1] sur [h(O); h(l)].
h(O) = - 3 et $h(l) \approx 1{,}51$. Donc 0 appartient à [h(O); h(l)]et l'équation h(q) = 0 admet une solution unique notée α dans [0; 1].

c. Sur $[0; \alpha]$, h est croissante donc **si $0 \leq q < 1$**, $h(q) < h(\alpha)$ soit **$h(q) < 0$**
Sur $[\alpha; 1]$, h est croissante donc si **$\alpha < q \leq 1$**, $h(q) > h(\alpha)$ soit **$h(q) > 0$**
Sur [1; 6] , h est décroissante donc $h(q) \geq h(6)$ et $h(6)>0$ donc **$h(q) > 0$**

3. **a. Etude des variations de B**

Nous savons que $B(q) = 1{,}8q - C_T(q)$ donc pour tout q de [0; 6] , $B'(q) = 1{,}8 - C_m(q)$
Il en découle que B'(q) = h(q)

D'après la question précédente,

- si $q \in\ ]0; \alpha[$, $h(q) < 0$ donc $B'(q) <0$ et la fonction B(q) est strictement décroissante sur $]0; \alpha[$
- si $q \in\ ]\alpha ; 6[$, $h(q) > 0$ donc $B'(q)>0$ et la fonction B(q) est strictement croissante sur $]\alpha ; 6[$

b. $\alpha \approx 0{,}28$
$B(0{,}28) = 0{,}28 - 1 - 4 \times 0{,}28 \times e^{-0{,}56}$ donc $B(0{,}28) \approx -1{,}36$ et **$B(\alpha) \approx -1{,}36$**
$B(\alpha)$ est négatif donc il est le déficit maximum que peut craindre l'usine.