LIMITES ET CONTINUITÉ

Afin de mieux comprendre ce chapitre, il est recommandé de relire le cours et les activités de Première sur les limites.

I) Rappels sur les limites

1) Limites des fonctions usuelles

Les fonctions suivantes tendent vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$:

$$f(x) = \quad x \qquad x^2 \qquad x^3 \qquad x^n\ (n \geqslant 1) \qquad \sqrt{x}$$

Les fonctions suivantes tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$:

$$f(x) = \quad \frac{1}{x} \qquad \frac{1}{x^2} \qquad \frac{1}{x^3} \qquad \frac{1}{x^n}\ (n \geqslant 1) \qquad \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Les fonctions suivantes tendent vers 0 lorsque x tend vers 0 :

$$f(x) = \quad x \qquad x^2 \qquad x^3 \qquad x^n\ (n \geqslant 1) \qquad \sqrt{x} \qquad \sin x$$

2) Limites de fonctions polynômes

La limite d'une fonction polynôme P est donnée par :

- la limite du terme du plus haut degré si x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$
- La quantité $P(a)$ si x tend vers a.

Exemples :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^3 - x + 2) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^3) = -3 \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5$.

3) Limites de fonctions rationnelles

Une fonction rationnelle f est un quotient de deux fonctions polynômes. Sa limite est donnée par :

- la limite du rapport des termes de plus haut degré si x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$
- La quantité $f(a)$ si x tend vers a et si f est définie en a.

Une étude plus précise (signes) est à faire si f est définie sur un domaine ouvert dont a est une borne.

Exemples :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2 + 3x - 1}{x^6 - 4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2}{x^6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^4} = 0$.
- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-3x^3 + 1}{2x^3 + x^2} = \dfrac{-23}{20}$.
- Étude de la limite de l'expression $\dfrac{-3x^3 + 1}{x^3 - 2x^2}$ lorsque x tend vers 2 par valeurs supérieures :

  Posons $N(x) = -3x^3 + 1$ et $D(x) = x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2)$. On a $\lim\limits_{x \to 2^+} N(x) = -23$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} D(x) = 0$ avec $D(x) > 0$ lorsque $x > 2$, donc $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{-3x^3 + 1}{x^3 - 2x^2} = -\infty$.

- Étude de la limite de l'expression $\frac{x^2-x-2}{x^3-2x^2}$ lorsque x tend vers 2 par valeurs supérieures.

  Posons $N(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ et $D(x) = x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$. On a $\lim_{x\to 2^+} N(x) = 0$ et $\lim_{x\to 2^+} D(x) = 0$.

  Ce qui donne une indétermination. Pour la lever, on factorise :

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-x-2}{x^3-2x^2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+1)(x-2)}{x^2(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x^2} = \frac{3}{4}.$$

4) Asymptotes

Soit f une fonction et C_f sa représentation graphique dans un repère $(O,\vec{u},\vec{v})$. Si :

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$) alors la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$)
- $\lim_{x\to a^*} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a^*} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à C_f.

  ($x \longrightarrow a^*$ signifiant que $x \longrightarrow a$ ou $x \longrightarrow a^+$ ou $x \longrightarrow a^-$)
- $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$) alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à C_f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$)

Exemple : montrer que la droite d'équation $y = x$ est une asympote oblique en $+\infty$ à la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

Exercice : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{2x^2-3x+2}{x-1}$.

- Trouver trois réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$
- Préciser les éventuelles asymptotes.

5) Théorèmes de comparaison

"une fonction plus grande qu'une fonction qui tend vers $+\infty$, tend vers $+\infty$"

"une fonction inférieure à une fonction qui tend vers $-\infty$, tend vers $-\infty$"

Soient f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a\,;+\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$)

- si, pour tout réel x assez grand, on a $f(x) \geqslant u(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$,

  alors f admet une limite en $+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- si, pour tout réel x assez grand, on a $f(x) \leqslant v(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$,

  alors f admet une limite en $+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Théorèmes analogues pour les limites en $-\infty$ et en a.

L'expression "pour tout x assez grand" signifie "pour tout $x \in\ ]b\,;+\infty[$ où $b \geqslant a$".

Démonstration :

Traduisons l'hypothèse " $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ ":

Pour toute ordonnée $y \in \mathbb{R}^+$ (aussi grande que voulue), il existe une abscisse $a \in \mathbb{R}^+$ telle que : $(x > a \Rightarrow u(x) > y)$

Traduisons l'hypothèse " pour tout réel x assez grand, on a $f(x) \geqslant u(x)$ " :

Il existe une abscisse b telle que : $(x > b \Rightarrow f(x) \geqslant u(x))$

Déduisons-en que f admet une limite en $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$:

Soit $y \in \mathbb{R}^+$ une ordonnée quelconque. Posons $c = \max(a\ ;\ b)$. (Où a et b sont définis ci-dessus)

On a donc : $x > c \Rightarrow (f(x) \geqslant u(x)$ **et** $u(x) > y)$

Donc pour tout ordonnée $y \in \mathbb{R}^+$, il existe une abscisse c telle que : $(x > c \Rightarrow f(x) > y)$

Ce qui signifie que f admet une limite en $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Le deuxième point se démontre de façon analogue.

Exemples :

- Soit $f(x) = -x + \sin x$. Étudier la limite de f en $+\infty$.

  Posons $v(x) = -x + 1$. Comme, pour tout réel x, $\sin x \leqslant 1$, on a, pour tout réel x, $f(x) \leqslant v(x)$.

  Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

- Soit $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$. Étudier la limite de g en 0.

  Posons $u(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Comme, pour tout réel x, on a $1 \leqslant \sqrt{1+x^2}$, on a, pour tout réel x, $g(x) \geqslant u(x)$

  Or, $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

"Une fonction encadrée par deux fonctions de ***même*** *limite ℓ en un endroit a pour limite ℓ en cet endroit"*

> Soient f, u et v des fonctions admettant des limites en un réel a.
>
> Si pour tout réel x assez proche de a, on a $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \lim\limits_{x\to a} v(x) = \ell$
>
> Alors la fonction f admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

C'est ce qu'on appelle le théorème des "gendarmes". Ce théorème s'étend aux limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exemples :

> L'expression "pour tout x assez proche de a" signifie "pour tout $x \in\ ]a - \varepsilon\ ;\ a + \varepsilon[$ où $\varepsilon \geqslant 0$.

- Soit $f(x) = 1 + \dfrac{\sin x}{x}$. Étudier la limite de f en $+\infty$.

  Posons $u(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

  Comme, pour tout réel x, on a $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, on a, pour tout réel x, $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$.

  Or $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 1$, donc f admet une limite en $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

- Soit $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Étudier la limite de f en 0.

  On sait que pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a : $|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x|$.

  Pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$, on a ($|\sin x| > 0$) : $1 \leqslant \left|\dfrac{x}{\sin x}\right| \leqslant \left|\dfrac{1}{\cos x}\right|$, c'est-à-dire $|\cos x| \leqslant \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1$

  Or, $\lim\limits_{x\to 0} |\cos x| = 1$, donc la fonction $|f|$ admet une limite en 0 et $\lim\limits_{x\to 0} \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| = 1$.

  Et comme f est positive au voisinage de 0 (x et $\sin x$ sont de mêmes signes), on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

"Si la distance entre les nombres $f(x)$ et ℓ est inférieure à une fonction qui tend vers 0 alors la fonction f tend vers le nombre ℓ"

Soient f et u des fonctions définies sur un intervalle du type $[a\,;\,+\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$)
Si, pour tout réel x assez grand, on a $|f(x) - \ell| \leqslant u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

Théorèmes analogues pour les limites en $-\infty$ et en a.

<u>Exemple</u> :

Déterminer la limite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$.

Nous savons qu'un sinus est toujours compris entre -1 et 1, donc $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$. Multiplions cette inégalité par $|x|$, on obtient : $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant |x|$. Posons maintenant $u(x) = |x|$. Nous avons ainsi $|f(x) - \ell| \leqslant u(x)$ avec $\ell = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$, ce qui nous permet de conclure que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

<u>6) Théorème de compatibilité avec l'ordre</u>

"Si une fonction f est inférieure à une fonction g à un endroit alors la limite de f est inférieure à la limite de g en cet endroit"

Si pour tout réel x d'un intervalle du type $]a\,;\,+\infty[$ on a : • $f(x) \leqslant g(x)$ • les fonctions f et g ont chacune une limite en $+\infty$ Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

<u>Remarque</u> : La limite transforme une inégalité STRICTE en une inégalité LARGE : si $f < g$ alors $\lim f \leqslant \lim g$.

Ce théorème s'étend aux limites en $-\infty$ ou en un point a.

<u>7) Limite d'une fonction composée</u>

Soient f, g et h trois fonctions telles que $f = g \circ h$. Si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ et si $\lim\limits_{X\to b} g(X) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(h(x)) = c$. (les lettres a, b et c désignent soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$)

Exemples :

- Limite en $+\infty$ de la fonction f définie (sur $\mathbb{R}$) par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

  Posons $X = h(x)$ avec $h(x) = x^2 + x + 1$, ainsi $f(x) = \sqrt{h(x)} = \sqrt{X}$.

  Nous savons que : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

- Limite en $-\infty$ de la fonction f définie (sur $\mathbb{R}^*$) par $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$.

  Posons $X = \dfrac{1}{x}$, ainsi $f(x) = \sin X$.

  Nous savons que $\lim\limits_{x \to +\infty} X = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \sin X = \sin 0 = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

- Limite en $\dfrac{1}{3}$ de la fonction f définie sur $]\dfrac{1}{3}\ ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x - 1}}$.

  Posons $X = 3x - 1$, ainsi $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{X}}$ (avec $X > 0$ puisque $x > \dfrac{1}{3}$).

  Nous savons que $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} X = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{X}} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} f(x) = +\infty$.

8) Fonctions n'admettant pas de limite

Parmi les fonctions qui sont sans limite, plusieurs cas se distinguent. Donnons quelques exemples :

- Fonction admettant des limites à droite et à gauche distinctes. C'est le cas de la fonction "inverse" en 0 :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

  La fonction "inverse" n'admet donc pas de limite en 0.

- Fonction admettant des limites à gauche et à droite finies et distinctes. C'est le cas de la fonction "partie entière" : $f(x) = E(x)$ = le plus grand entier n inférieur ou égal à x.

  (Exemples : $E(\pi) = 3$, $E(1) = 1$, $E(-2{,}5) = -3$)

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} E(x) = 0 \text{ et } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} E(x) = -1$$

  La fonction "partie entière " n'admet donc pas de limite en 0 (ni en $n \in \mathbb{Z}$)

- Fonction n'admettant pas de limite en $+\infty$. C'est le cas de la fonction sinus (ou cosinus) : $f(x) = \sin x$

  On prouve que f n'admet pas de limite avec des suites :

  considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 2\pi n$ et $v_n = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$.

  On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(u_n) = \sin(2\pi n) = 0$ et $f(v_n) = \sin(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n) = \sin \dfrac{\pi}{2} = 1$.

  (On constate donc que les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ sont constantes)

  Si f admettait une limite ℓ en $+\infty$, on aurait $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n) = \ell$.

  Or, ceci est impossible puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n) = 1$.

  Donc la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$. (On raisonne de même avec la fonction cosinus)

- Fonction sans limite, ni à droite, ni à gauche : $f(x) = \cos \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.

  Montrons que f n'a pas de limite en 0.

  Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ et $v_n = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n}$

  Notons que lorsque n tend vers $+\infty$, on a (u_n) et (v_n) qui tendent vers 0.

  On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(u_n) = \cos(2\pi n) = 1$ et $f(v_n) = \cos(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n) = \cos \dfrac{\pi}{2} = 0$.

  (On constate donc que les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ sont constantes)

  Si f admettait une limite ℓ en 0, on aurait $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n) = \ell$.

  Or, ceci est impossible puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n) = 0$.

II) Continuité - Prolongement par continuité

<u>Définition 1</u>

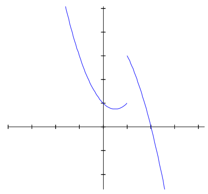
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un réel de I.

On dit que f est continue en a si f admet une limite finie ℓ en a.

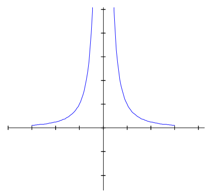
On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point a de I.

<u>Exemples et contre-exemples</u> :

- La fonction représentée ci-contre est non continue sur $[-3 ; 3]$: en effet, elle n'admet pas de limite en 1 (la courbe fait un "saut"). Néanmoins, elle est continue sur $[-3 ; 1[$ et sur $]1 ; 3[$.



- La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ une limite en 0 égale à $+\infty$. Mais cette limite n'est pas finie, de plus cette fonction n'est pas définie en 0 donc la fonction f n'est pas continue en 0.



- La fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } x = 3 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$ n'est pas continue en 3 car elle n'admet pas de limite en 3.

<u>Remarques</u> :

Lorsqu'une fonction f est continue en a, on a nécessairement $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par le fait que sa représentation graphique sur I est d'un seul morceau.

La notion de continuité sur I n'a pas de sens si I n'est pas un intervalle.

<u>Théorème 1</u>

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

Ce théorème sera démontré dans un chapitre ultérieur (calcul différentiel).

Ce théorème nous livre donc un "stock" de fonctions continues : fonctions polynômes, fonctions rationnelles, etc..., qui sont continues sur tout intervalle I contenu dans leur ensemble de définition.

<u>Conséquence du théorème 1</u>

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a\,;\,b[$.

Si f est seulement dérivable sur $]a\,;\,b[$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ alors f est continue sur $[a\,;\,b[$.

<u>Démonstration</u> : puisque f est dérivable sur $]a\,;\,b[$, f est donc continue sur $]a\,;\,b[$ (théorème 1). En outre, la fonction f admet une limite finie en a telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, donc f est continue en a (définition 1). La fonction f est donc continue sur $[a\,;\,b[$.

<u>Exemple</u> :

Soit f la fonction "racine carrée" : $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+ = [0\,;\,+\infty[$. Cette fonction n'est dérivable que sur $]0\,;\,+\infty[$. En effet $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc f' n'est pas définie en 0. Pourtant, $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0 = f(0)$, donc la fonction "racine carrée" est continue sur $[0\,;\,+\infty[$.

<u>Remarque</u> : la réciproque du théorème 1 est fausse ; il existe des fonctions continues sur un intervalle I qui ne sont pas dérivables sur I (fonction racine carrée sur $[0\,;\,+\infty[$).

<u>Définition 2</u>

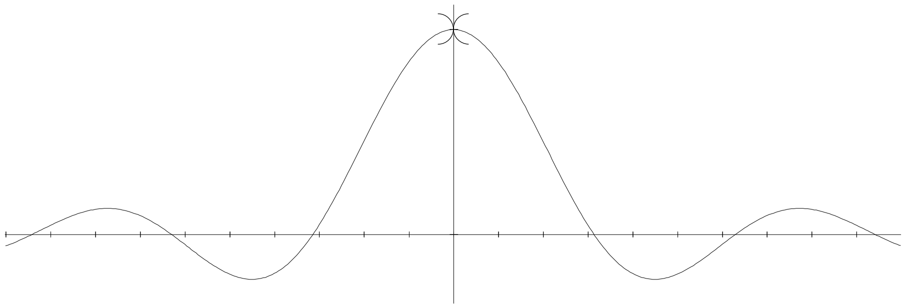
Soit I un intervalle et $a \in I$. Soit f une fonction définie sur I sauf en a admettant une limite finie ℓ en a.

La fonction $\overline{f}$ définie par : $\begin{cases} \overline{f}(x) = f(x) \text{ si } x \neq a \\ \overline{f}(x) = \ell \text{ si } x = a \end{cases}$ est appelée prolongement continu de f en a.

<u>Remarques</u> :

- les fonctions f et $\overline{f}$ n'ont pas le même ensemble de définition : f n'est pas définie en a, alors que $\overline{f}$ l'est.
- La fonction $\overline{f}$ est définie et continue en a.

<u>Exemple</u> (classique) : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Voici sa représentation graphique :



Cette fonction n'est pas définie en 0. Cependant, elle admet une limite finie $\ell = 1$ en 0 ($\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, voir DM).
On peut donc prolonger f par continuité en une fonction $\overline{f}$ qui coïncide avec f sur $\mathbb{R}^*$ et qui vérifie $\overline{f}(0) = 1$.

<u>Autre exemple</u> : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$. On a vu (en I)5) exemple) que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, donc f admet un prolongement par continuité $\overline{f}$ qui coïncide avec f sur $\mathbb{R}^*$ et qui vérifie $\overline{f}(0) = 0$.

III) Image d'un intervalle par une fonction continue

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

L'image de I, notée $f(I)$, est l'ensemble de tous les nombres $f(x)$ où $x \in I$.

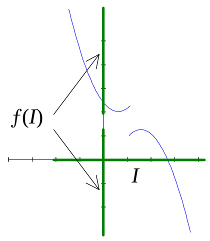
Exemple : $f(x) = x^2$; $I =]-\frac{3}{2}$; $2]$; $f(I) = [0 ; 4]$; $J = [0 ; +\infty[$, $f(J) = J$.

Il se peut très bien que $f(I)$ ne soit pas un intervalle. Si $f(x) = E(x)$, $E(x)$ désignant la partie entière de x, on a $f([0 ; 1]) = \{0 ; 1\}$.

Théorème 2

Si une fonction f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration : admise. Mais le théorème est intuitivement évident : en effet, si $f(I)$ n'est pas un intervalle, on n'arrive pas à construire une fonction f continue sur I :



Remarque : I n'est a priori supposé ni borné, ni fermé.

Voici une conséquence importante du théorème 2, connue sous le nom de théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$.

Alors, pour tout réel λ intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel $c \in I$ tel que $f(c) = \lambda$.

(Autrement dit, l'équation $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution dans I)

Démonstration :

D'après le théorème 2, comme f est continue sur I, $f(I)$ est un intervalle. Par ailleurs on $f(a) \in f(I)$ et $f(b) \in f(I)$, donc $\lambda \in f(I)$ (puisque $f(I)$ est un intervalle et λ est intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$).

Donc, il existe $c \in I$ tel que $f(c) = \lambda$.

Application : le théorème des valeurs intermédiaires permet de démontrer un premier théorème de point fixe :

Théorème du point fixe

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$.

Si $f(I) \subset I$, alors f admet (au moins) un point fixe sur I. (Il existe (au moins) un réel x de I tel que $f(x) = x$)

Démonstration :

Considérons la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x) - x$.

Montrons que $0 \in g(I)$:

On a $g(a) = f(a) - a \in g(I)$ et $g(b) = f(b) - b \in g(I)$.

Or, comme $f(I) \subset I$, on a $f(a) \geqslant a$ et $f(b) \leqslant b$, c'est-à-dire $g(a) \leqslant 0$ et $g(b) \geqslant 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $x \in I$ tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x$.

Le théorème suivant concerne le cas où I est un intervalle fermé borné : en effet, si I est un intervalle ouvert et f continue sur I, suivant les situations $f(I)$ peut être un intervalle fermé, semi-ouvert, ouvert, borné ou non borné. Cependant, si I est fermé borné ...

Théorème 3

Si une fonction f est continue sur un intervalle fermé borné I, alors $f(I)$ est un intervalle fermé borné.

Démonstration : ce théorème est admis !

Corollaire

Si f est continue sur un intervalle fermé borné I, alors f est bornée sur I et atteint ses bornes.

Démonstration :

D'après le théorème 3, $f(I)$ est un intervalle fermé borné. Notons le $f(I) = [m\ ;\ M]$ (avec $m \leqslant M$).

On a donc pour tout $x \in I$: $m \leqslant f(x) \leqslant M$, donc f est bornée sur I.

Comme $m \in f(I)$, il existe au moins un $x_m \in I$ tel que $f(x_m) = m$. Donc m est le minimum de f sur I.

De même, il existe au moins un $x_M \in I$ tel que $f(x_M) = M$. Donc M est le minimum de f sur I.

IV) Fonction continue strictement monotone

Le théorème suivant permet de préciser l'intervalle image $f(I)$ lorsque la fonction f est strictement monotone :

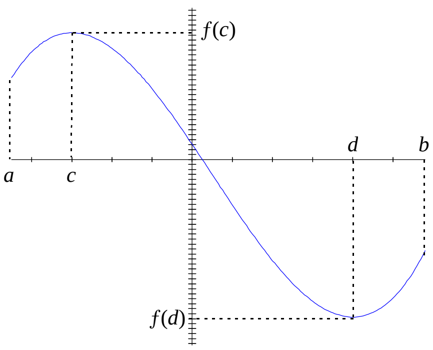
Théorème 4

Si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle $I = [a\ ;\ b]$, alors $f(I)$ est l'intervalle $[f(a)\ ;\ f(b)]$ (si f est strictement croissante) ou $[f(b)\ ;\ f(a)]$ (si f est strictement décroissante).

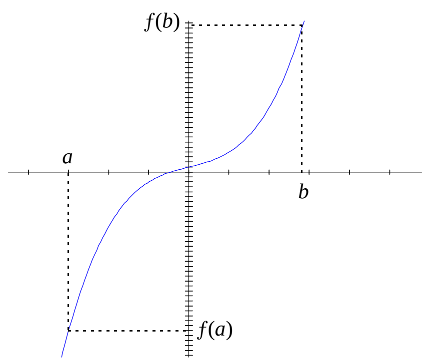
Démonstration : d'après le théorème 2, $f(I)$ est un intervalle. Étudions le cas où f est strictement croissante (le cas strictement décroissant est analogue) : donc pour tout élément x de I, on a : $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$. Puisque les nombres $f(x)$ sont compris entre $f(a)$ et $f(b)$, on en déduit que $f(I) \subset [f(a)\ ;\ f(b)]$. En outre, puisque a et b sont des éléments de I, $f(a)$ et $f(b)$ sont des éléments de l'intervalle $f(I)$, donc $[f(a)\ ;\ f(b)] \subset f(I)$, ce qui permet de conclure que $f(I) = [f(a)\ ;\ f(b)]$.

Remarques :

- L'hypothèse "f strictement monotone" est indispensable comme le montre l'illustration suivante :



Ci dessus, la fonction n'est pas strictement monotone sur $I = [a\ ;\ b]$ et l'image de I n'est pas $[f(a)\ ;\ f(b)]$.



Ci dessus, la fonction est strictement croissante sur $I = [a\ ;\ b]$ et on a bien $f(I) = [f(a)\ ;\ f(b)]$.

- Le théorème s'étend aux intervalles ouverts ainsi qu'aux bornes infinies : par exemple, quelle est l'image de l'intervalle]0 ; +∞[par la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$?

  Calculons la dérivée f' de f : $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

  On constate que la fonction dérivée f' est définie sur]0 ; +∞[, la fonction f est donc dérivable sur]0 ; +∞[.

  De plus $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \,]0 ; +\infty[$, donc f est strictement décroisante sur]0 ; +∞[.

  En outre, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, donc $f(]0 ; +\infty[) =]1 + \infty[$.

Le théorème 4 et le théorème des valeurs intermédiaires permettent d'établir le théorème suivant dit "de bijection". Rappelons qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est une bijection, si tout élément y de F admet un unique antécédent x dans E. Avec le symbolisme mathématique, cela se note :

$$\forall y \in F, \exists!\, x \in E : y = f(x)$$

$\forall$ signifie : "quelque soit"

$\exists$ signifie : "il existe"

! signifie : "un unique"

: signifie "tel que"

<u>Théorème de bijection</u>

Si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle $I = [a ; b]$, alors f est une bijection de I sur l'intervalle $[f(a) ; f(b)]$ (si f est strictement croissante) ou $[f(b) ; f(a)]$ (si f est strictement décroissante) :

pour tout réel λ intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel $c \in I$ tel que $f(c) = \lambda$.

(Autrement dit : l'équation $f(x) = \lambda$ admet une et une seule solution dans I)

<u>Démonstration</u> :

Soit λ un réel intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous avons l'existence d'un réel c dans I tel que $f(c) = \lambda$.

Montrons que ce réel c est unique. Supposons qu'il existe un réel $c' \in I$ tel que $f(c') = \lambda$.

Si $c < c'$, alors $f(c) < f(c')$ (lorsque f est strictement croissante) ou $f(c) > f(c')$ (lorsque f est strictement décroissante). Donc $f(c) \neq f(c')$, c'est-à-dire $\lambda \neq \lambda$ ce qui est absurde.

On raisonne de même si $c > c'$ pour aboutir à la même absurdité.

Donc on a nécessairement $c = c'$ et, par suite, le réel c est unique.

<u>Remarque</u> : comme le théorème 4, le théorème de bijection s'étend aux intervalles non bornés.

En résumé, lorsque f est une fonction définie sur un intervalle I, et lorsque $\lambda \in f(I)$. L'hypothèse de continuité de f nous fournit l'existence d'au moins une solution (dans I) de l'équation $f(x) = \lambda$. Si l'on ajoute l'hypothèse de stricte monotonie de f, nous sommes alors assurés de l'unicité de cette solution.

<u>Corollaire</u>

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a ; b]$

Si $f(a)f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I.

Démonstration :

Si $f(a)f(b) < 0$, cela signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Autrement dit, 0 est intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. On conclut avec le théorème de bijection.

Applications du théorème de bijection : localisation d'une racine d'une équation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x} + x^2 - 4$.

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0 + \infty[$ et que $1,6 < \alpha < 1,7$.

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur ce même intervalle et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x > 0 \text{ pour tout } x \in \ ]0 ; +\infty[$$

La fonction f est donc continue et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$. D'après le théorème de bijection, on a :

$$f(]0 ; +\infty[) =]f(0) ; \lim_{x\to+\infty} f(x)[$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $f(0) = -4$. D'où $f(]0 ; +\infty[) =]-4 ; +\infty[$

Or, $0 \in \ ]-4 ; +\infty[$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0 +\infty[$.

De plus, $f(1,6) \simeq -0,175$ et $f(1,7) \simeq 0,194$, donc $1,6 < \alpha < 1,7$.

Autre application du théorème de bijection : le nombre **e** : voir chapitre sur le logarithme néperien.

Exercice : Démontrer que les applications :

$$\varphi : \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$
$$\theta \mapsto \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\phi :]0; \pi[\to \mathbb{R}$$
$$\theta \mapsto \text{cotan}\,\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

sont bijectives.