Chapitre 21 – Gestion de la qualité

Entraînements complémentaires

Exercice 21.4 *** Contrôle de la qualité a posteriori

La société Le Bastion est une entreprise de vente par correspondance.

Le Bastion s'est engagé à livrer ses clients dans les 48 heures de la commande. Lors du lancement de ce service, l'engagement était respecté pour 90 % des livraisons aux clients. Une enquête sommaire du directeur des ventes lui a donné le sentiment que le service ne portait plus la même attention au respect des délais et que la fréquence des livraisons tardives atteignait approximativement 15 %. Le chef de service des expéditions explique que toute réduction du délai de livraison nécessiterait des moyens supplémentaires en personnel et en matériel.

Avant de décider des mesures de redressement, le directeur étudie un échantillon de livraisons. Au cas où il déciderait de ne pas modifier les moyens du service, il souhaite que son risque d'erreur soit limité à 2 %.

Travail à faire

1. Établir une règle de décision en donnant la définition :
- **1.1. de l'hypothèse nulle ;**
- **1.2. de la valeur critique ;**
- **1.3. du risque de première espèce (préciser sa valeur) ;**
- **1.4. du risque de seconde espèce.**

2. En supposant que le directeur commercial a fixé la taille de l'échantillon à 900 livraisons :
- **2.1. déterminer la valeur critique ;**
- **2.2. déterminer le risque de seconde espèce.**

3. En supposant que le directeur commercial a fixé la valeur critique à 11 % :
- **2.1. déterminer l'effectif de l'échantillon ;**
- **2.2. déterminer le risque de seconde espèce. Commenter.**

4. En supposant que le directeur commercial a fixé le risque de seconde espèce à 1 % :
- **4.1. déterminer la taille de l'échantillon et la valeur critique ;**
- **4.2. représenter sur un même graphique la distribution de la fréquence des retards dans l'échantillon dans le cas de l'hypothèse nulle et dans le cas de l'hypothèse opposée. Faire apparaître la valeur critique et les risques associés aux hypothèses.**

Corrigé de l'exercice 21.4

1. Règle de décision

1.1. Hypothèse nulle

Le test doit permettre de choisir entre deux hypothèses appelées H_0 et H_1 :

- H_0 ; il existe dans l'entreprise une proportion p_0 = 10 % de livraisons en retard ;

- H_1 ; il existe dans l'entreprise une proportion p_1 = 15 % de livraisons en retard.

La première hypothèse est la plus favorable à l'entreprise puisqu'elle évite de mettre en place des moyens supplémentaires : elle est qualifiée d'hypothèse nulle et, pour cette raison, elle est affectée de l'indice 0.

1.2. Valeur critique

On va observer, dans l'échantillon, la fréquence f des livraisons tardives et l'on comparera f à une valeur π, dite « *valeur critique* » :

- si $f < \pi$, on décide que H_0 est vraie ;
- si $f > \pi$, on décide que H_1 est vraie.

1.3. Risque de première espèce

Le risque de première espèce est la probabilité α de rejeter H_0 (et de décider des moyens supplémentaires) alors que H_0 est vraie (et que ces moyens sont superflus). Le directeur commercial choisit de limiter ce risque à 2 %.

1.4. Risque de seconde espèce

Le risque de première espèce est la probabilité β de rejeter H_1 (et de décider de laisser le service en l'état) alors que H_1 est vraie (et que les engagements envers les clients ne sont pas respectés).

2. Effectif de l'échantillon : n = 900 et risque de première espèce : α = 0,02

2.1. Valeur critique

Supposons que H_0 soit vraie. La fréquence f des retards dans l'échantillon suit une loi Normale de moyenne p_0 = 0,10 et d'écart-type $\sigma_0 = \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\dfrac{0,10 \times 0,90}{900}} = 0,01$.

La variable centrée réduite est $T = \dfrac{f - 0,10}{0,01}$.

La table de la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite nous indique que

$$\alpha = 0,02 = 1 - 0,98 \cong \text{ Prob } \{T > 2,05\} = \text{ Prob}\left\{\frac{f - 0,10}{0,01} > 2,05\right\} = \text{Prob } \{f > 0,1205\}.$$

Si $f < 0,1205$, on peut affirmer que H_0 est vraie avec un risque d'erreur de 2 %. La valeur critique est donc $\boldsymbol{\pi = 0,1205}$.

2.2. Risque de seconde espèce

Supposons que H_1 soit vraie. La fréquence f des retards dans l'échantillon suit une loi Normale de moyenne p_1 = 0,15 et d'écart-type $\sigma_1 = \sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n}} = \sqrt{\dfrac{0,15 \times 0,85}{900}} = 0,0119$.

La variable centrée réduite est $T = \dfrac{f - 0{,}15}{0{,}0119}$.

Si $f = \pi = 0{,}1205$, alors $t_\pi = \dfrac{0{,}1205 - 0{,}15}{0{,}0119} \cong -2{,}48$.

La table de la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite nous indique que
β = Prob $\{T < -2{,}48\}$ = Prob $\{T > 2{,}48\}$ = 1 – Prob $\{T < 2{,}48\}$ = 1 – 0,9934 = 0,0066.
Si $f < 0{,}1205$, il y a un risque β = 0,66 % pour que H_1 soit vraie et que H_0 soit acceptée à tort.

3. Valeur critique : π = 0,11 et risque de première espèce : α = 0,02

2.1. Taille n *de l'échantillon*

Supposons que H_0 soit vraie. La fréquence f des retards dans l'échantillon suit une loi Normale de moyenne $p_0 = 0{,}10$ et d'écart type $\sigma_0 = \sqrt{\dfrac{0{,}10 \times 0{,}90}{n}}$.

La variable centrée réduite correspondant à $\pi = 0{,}11$ est $t_\pi = \dfrac{0{,}11 - 0{,}10}{\sqrt{\dfrac{0{,}10 \times 0{,}90}{n}}} = 0{,}033\sqrt{n}$.

Rappelons que, pour $\alpha = 0{,}02$, $t_\pi = 2{,}05 \Rightarrow 0{,}033\sqrt{n} = 2{,}05 \Rightarrow n = 3\,782$.

L'échantillon doit comprendre 3 782 livraisons.

2.2. Risque de seconde espèce

Supposons que H_1 soit vraie. La fréquence f des retards dans l'échantillon suit une loi Normale de moyenne $p_1 = 0{,}15$ et d'écart type $\sigma_1 = \sqrt{\dfrac{0{,}15 \times 0{,}85}{3\,782}} = 0{,}0058$.

Pour $\pi = 0{,}11$, la variable centrée réduite est $t_\pi = \dfrac{0{,}11 - 0{,}15}{0{,}0058} \cong -6{,}9$

$\Rightarrow$ Prob $\{T < -6{,}9\} = \beta \cong 0$.

Le risque de seconde espèce est pratiquement nul. L'accroissement de la taille de l'échantillon a permis d'éliminer le risque de refuser des moyens nécessaires au service des livraisons.

4. Risque de première espèce : α = 0,02 et risque de seconde espèce : β = 0,01

4.1. Taille de l'échantillon et valeur critique

Si H_0 est vraie $\Rightarrow \alpha = 0{,}02 \Rightarrow t_\pi = \dfrac{\pi - 0{,}10}{\sqrt{\dfrac{0{,}10 \times 0{,}90}{n}}} = 2{,}05$.

Si H_1 est vraie $\Rightarrow \beta = 0{,}01 \Rightarrow t_\pi = \dfrac{\pi - 0{,}15}{\sqrt{\dfrac{0{,}15 \times 0{,}95}{n}}} = -2{,}33$.

Résolvons le système de deux équations à deux inconnues (π et n).

Le rapport des deux équations, membre à membre, donne :

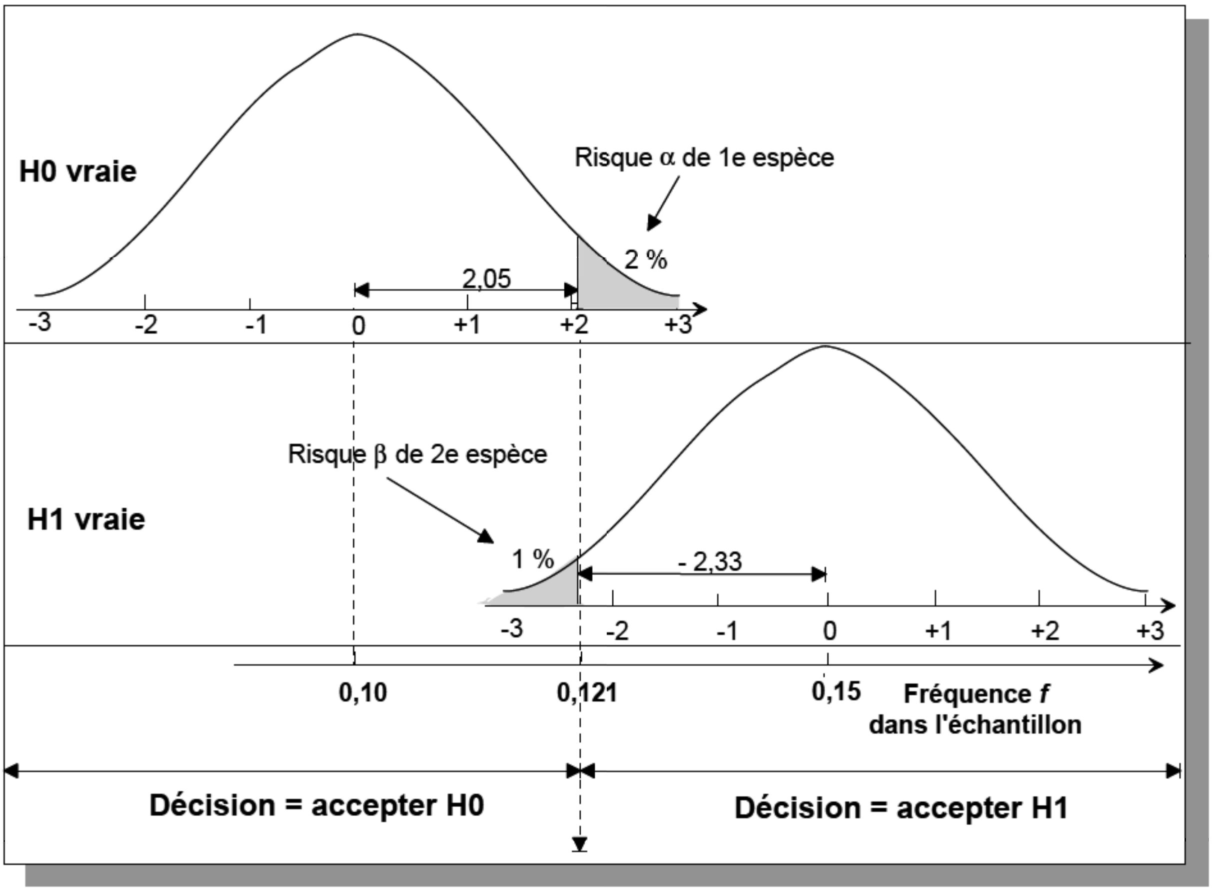
$$\frac{2,05}{-2,33} = \frac{\pi - 0,10}{\pi - 0,15} \times \sqrt{\frac{0,15 \times 0,85}{0,10 \times 0,90}} \Rightarrow \frac{\pi - 0,10}{\pi - 0,15} = -0,7392 \Rightarrow \pi = 0,121.$$

En reportant la valeur de π dans la première équation, nous obtenons :

$$\frac{0,121 - 0,10}{\sqrt{\frac{0,10 \times 0,90}{n}}} = 2,05 \Rightarrow 29,286 = \sqrt{n} \Rightarrow n \cong 858.$$

La taille de l'échantillon est de 858 livraisons et la valeur critique qui détermine le choix entre les deux hypothèses est 12,1 %.

4.2. Représentation graphique



Exercice 21.5 *** Coûts cachés

La Compagnie de financement foncier (CFF) est un établissement financier spécialisé dans le financement des investissements immobiliers.