الأكاديمية الجهوية للتربية و التكوين

فاس بولمان- نيابة اقليم بولمان

المستوى: الثانية بكالوريا	الامتحان التجريبي	دورة ماي2010
الشعبة: العلوم الرياضية	المادة: الرياضيات $\boxed{\frac{1}{3}}$	مدة الإنجاز: 4 ساعات

التمرين الأول: (3 نقط)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية و $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

نضع: $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ و $M_{(a,b)}=\begin{pmatrix}a+b & 3b\\ b & a-b\end{pmatrix}$.

نعتبر المجموعة: $E=\left\{M_{(a,b)} \ / \ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

1) أ) بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي جزئي من $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$. 0,5

ب) بين أن (I,J) أساس للفضاء المتجهي E. 0,5

2) أ) بين أن $J^2\in E$ و استنتج أن: E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$. 0,5

ب) بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية. 0,75

ج) بين أن العنصر $M_{(a,b)}$ قاسم لصفر في E إذا وفقط إذا كان: $\mathbf{a^2-4b^2=0}$. 0,75

التمرين الثاني: (4 نقط)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E): $z^2-az+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=0$ حيث a عدد عقدي. ليكن z_0 و z_1 حلي المعادلة (E).

1) بين أن: $|z_0||z_1|=1$ و $\arg(z_0)+\arg(z_1)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$. 0,5

2) نضع $z_0=e^{i\theta}$ حيث $\theta\in\mathbb{R}$.

أ) بين أن: $a=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$. 0,5

ب) استنتج أنه إذا كان $z_0=i$ فإن: $1+ia-a^2-ia^3+a^4+ia^5=0$. 0,5

3) نفترض أن: $z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

أ) حدد العدد z_1 على شكليه المثلثي و الجبري، ثم استنتج قيمتي $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. 0,75

ب) أكتب العدد a على شكليه المثلثي و الجبري. 0,5

4) نعتبر التحويل R الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ حيث: $z'=iz+\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$. نعتبر النقط $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ حيث: $a=e^{i\frac{\pi}{12}}$ و $b=e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $C=R(B)$.

أ) بين أن R دوران محددا مركزه وزاويته. 0,5

ب) تحقق أن $c-a=i(b-a)$. 0,25

ج) نضع $D=R(C)$. بين أن A منتصف القطعة $[BD]$. 0,5

التمرين الثالث: (3 نقط)

I) بين أن مجموعة حلول المعادلة: $27x - 31y = 1$ في $\mathbb{Z}^2$ هي : $\{(31k - 8, 27k - 7) / k \in \mathbb{Z}\}$. 1

II) نعتبر المجموعة: $E = \{0, 1, 2, ..., 30\}$.

1) حدد العدد a من E الذي يحقق: $27a \equiv 1[31]$. 0,5

2) ليكن f التطبيق من E نحو E الذي يربط كل عنصر n من E بباقي قسمة العدد $27n + 4$ على 31.

أ) بين أن $\forall(n,m) \in E^2 : f(n) = f(m) \Rightarrow n = m$. 0,5

ب) ليكن m من E . حدد n من E بحيث $f(n) = m$. (يمكنك استعمال 1)). 0,5

ج) استنتج أن التطبيق f تقابلي وحدد تقابله العكسي f^{-1}. 0,5

مسألة: (10 نقط)

الجزء الأول لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]-1; +\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \quad ; \quad x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[\\ f(-1) = 1 \;;\; f(0) = e \end{cases}.$$

و (C_f) منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ) بين أن: $f(x) = e^{\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}} \quad ; \quad (\forall x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[)$. 0,25

ب) أدرس اتصال الدالة f في الصفر و على اليمين في -1. 0,5

2) أ) أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. 0,5

ب) بين أن: $f(x) - x = x\left(e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} - 1\right) + e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \quad ; \quad (\forall x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[)$. 0,25

ج) استنتج الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$. 0,5

3) بين أن: $\lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = +\infty$ ثم أول هندسيا النتيجة. (يمكن استعمال السؤال 1) أ) ووضع $t = x+1$). 0,5

4) أ) بين أن: $\int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 \quad : \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. 0,5

ب) بين أن: $\frac{t^2}{1+t} \leq 2t^2 \quad ; \quad \left(\forall t \geq -\frac{1}{2}\right)$ 0,25

ج) بين أن: $\left|\int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt\right| \leq \frac{2}{3}|x|^3 \quad ; \quad \left(\forall x \geq -\frac{1}{2}\right)$. 0,5

ج) استنتج أن: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$.	0,25
ه) استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق في 0 وأن $f'(0)=\dfrac{e}{2}$.	0,5
5) أ) أدرس تغيرات الدالة g حيث $g(x)=x-\ln(x+1)$ و استنتج أن: $g(x)\geq 0$; $(\forall x>-1)$.	0,25
ب) بين أن: $f'(x)=\dfrac{(x+1)g(x)}{x^2}e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$; $(\forall x\in]-1;0[\cup]0;+\infty[)$.	0,5
ج) ضع جدول تغيرات الدالة f.	0,25
6) أنشئ المنحنى (C_f).	1

الجزء الثاني نعتبر الدالة F المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\int_0^1 f(xt)dt$.

1) أ) بين أن: $(\forall x\in\mathbb{R}^+)$: $f(x)\geq x$.	0,25
ب) استنتج أن: $F(x)\geq\dfrac{x}{2}$; $(\forall x\geq 0)$.	0,25
ج) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.	0,25
2) أ) بين أن: $(\forall x\in]0;+\infty[)$: $F(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.	0,5
ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و أن: $(\forall x\in]0;+\infty[)$: $F'(x)=\dfrac{1}{x}\left(f(x)-F(x)\right)$.	0,5
ج) بين أن: $e\leq F(x)\leq f(x)$; $(\forall x\in[0;+\infty[)$.	0,25
د) استنتج أن F تزايدية على $\mathbb{R}^+$.	0,25

الجزء الثالث نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي: $u_n=\int_0^1 f\left(\dfrac{t}{n}\right)dt$.

1) أ) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ تناقصية.	0,25
ب) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*: u_n\geq e$.	0,25
2) أ) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*: u_n=n\int_0^{\frac{1}{n}}f(t)dt$.	0,25
ب) استنتج أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*: u_n\leq f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.	0,25
ج) أحسب $\lim u_n$.	0,25