Exemples de résolution
d'équations du second degré

23 septembre 2005

1 Formules

Pour résoudre une équation du second degré de la forme

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0, \tag{1}$$

où a, b et c sont des paramètres numériques, une démarche *systématique* consiste à appliquer la méthode suivante.

On calcule d'abord le *discriminant* de l'équation ; c'est le nombre

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c.$$

- si Δ est **strictement positif**, alors on calcule une solution

  $$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a}$$

  et on en déduit l'autre solution

  $$x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a}$$

- si Δ est **égal à 0**, alors la seule solution est donnée par

  $$u = \frac{-b}{2\,a}$$

- si Δ est **strictement négatif**, alors l'équation (1) n'a pas de solution réelle, c'est-à-dire que $a\,x^2 + b\,x + c$ n'est jamais égal à 0.

Les justifications de ces formules se trouvent dans le cours *Équations du second degré*, disponible en téléchargement au format PDF sur le site `www.mathforu.com`, dans la rubrique « **Cours & Exercices** ».

2 Exemples

Résoudre l'équation

$$x^2 - 2\,x - 2 = 0. \tag{2}$$

Alors, avec $a = 1$, $b = -2$ et $c = -2$, on calcule le discriminant

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-2) = 8.$$

Puisque $\Delta > 0$, on calcule la première solution

$$x' = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2}$$

c'est-à-dire en simplifiant

$$\boxed{x' = 1 - \sqrt{2}}$$

On en déduit donc l'autre solution, *conjuguée* de la première

$$\boxed{x'' = 1 + \sqrt{2}}$$

Remarque : il ne faut pas refaire tous les calculs pour obtenir la deuxième solution, puisqu'il suffit de *changer le signe* devant la racine du discriminant ; en effet, la formule s'écrit $x = (-b \pm \sqrt{\Delta})/(2\,a)$.

Résoudre l'équation

$$3\,x^2 - 5\,x + 2 = 0. \tag{3}$$

On calcule le discriminant, avec $a = 3$, $b = -5$ et $c = 8$. On a

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1$$

et puisque $\Delta > 0$, on calcule la première solution

$$x' = \frac{5 - \sqrt{1}}{2 \times 3} = \frac{4}{6}$$

c'est-à-dire en simplifiant

$$\boxed{x' = \frac{2}{3}}$$

et on en déduit la seconde solution

$$x' = \frac{5 + \sqrt{1}}{2 \times 3} = \frac{6}{6}$$

$$\boxed{x' = 1}$$

Remarque : la valeur $x = 1$ aurait pu facilement être « devinée » : c'est une racine *évidente* du polynôme $3\,x^2 - 5\,x + 1$.

Résoudre l'équation

$$9\,x^2 + 12\,x + 4 = 0. \tag{4}$$

Le calcul du discriminant donne

$$\Delta = 12^2 - 4 \times 9 \times 4 = 0.$$

Alors, l'équation n'a qu'une seule solution, donnée par

$$u = \frac{-12}{2 \times 9}$$

c'est-à-dire en simplifiant

$$\boxed{u = -2/3}$$

Résoudre l'équation

$$x^2 - 2\,x + 2 = 0. \tag{5}$$

Le discriminant est

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4.$$

Puisque $\Delta < 0$,cette équation n'a **aucune solution** parmi les nombres réels.

Résoudre l'équation

$$5\,x^2 - 10x + 6 = 0. \tag{6}$$

Le calcul du discriminant donne

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 5 \times 6 = -20.$$

Puisque Δ est négatif, cette équation n'a **aucune solution**.

Extension : le cas de coefficients *fractionnaires*, ou contenant des *radicaux*, etc… n'a pas été envisagé ici dans un but de simplification. Le formules restent malgré tout applicables dans le cas d'équations comme

$$\frac{3}{4}\,x^2 - \frac{5}{3}\,x + \frac{1}{2} = 0$$

ou bien même

$$x^2\sqrt{5} - 2\pi\,x + 1,5 = 0$$