Compléments didactiques en mathématiques/sciences au secondaire I.

But de ce travail de certification : Comparer des comportements imaginés d'élèves placés en situation (analyse à priori) et les comportements observés (analyse à posteriori). Ces comportements se rapporteront à des cheminements intellectuels et à des formes de raisonnement.

Ce travail s'inscrit dans les directives du Plan d'études vaudois (PEV ; DFJ-Direction générale de l'enseignement obligatoire - version août 2006). Les objectifs fondamentaux, au niveau des mathématiques, sont spécifiés aux pages 15-1 à 15-13 de ce document. Dans le cadre qui nous concerne, il s'agira de :

NOMBRES ET OPÉRATIONS Résoudre des problèmes numériques	■ ■ ■

Les compétences visées sont de deux types :

- mettre en œuvre une démarche de type scientifique

Compétences visées	Compétences associées à la compétence visée	Contenus/connaissances
Mettre en œuvre une démarche de type scientifique comprenant des phases d'essais, de conjecture, de vérification et de justification		• cette compétence visée se construit et s'évalue à l'aide de problèmes numériques, géométriques…
	S'approprier le problème pour se représenter le but à atteindre • prendre en compte la consigne • repérer la question posée	
	Traiter le problème • essayer pour voir • tenir compte d'une ou plusieurs informations pour en déduire de nouvelles	• chaînons déductifs • démonstration • hypothèse • conclusion
	• s'assurer de la validité des solutions (contrôler son résultat ou celui d'un tiers)	
	Communiquer des démarches et des résultats • les mettre en forme accessible à autrui • produire des arguments sur la validité d'une démarche, d'une solution	
	S'approprier quelques règles du débat mathématique et savoir les utiliser en situation	• contre-exemple

Ainsi que :

- représenter des situations de la vie courante. Dans ce cas, les compétences associées seront les plus pertinentes :

Compétences visées	Compétences associées à la compétence visée	Degrés 7 8 9	Contenus/connaissances
Représenter des situations de la vie courante	• trier et organiser des données	■ □ □	• tableaux
	• traduire un ensemble de données par une représentation appropriée	○ ■ □	
	• comparer différentes représentations graphiques d'une même situation	○ ○ ○	• diagramme cartésien, en barre, circulaire, en colonnes, en bâton, figuratif
	• interpréter des données chiffrées ou graphiques	■ □ □	• moyenne arithmétique
	• analyser et critiquer des informations	○ ○ ○	

1. **<u>Question ou hypothèse de recherche.</u>**

« Les élèves ont-ils une représentation graphique ou mentale des nombres premiers ***autre*** que celle obtenue avec le crible d'Eratosthène ? »

2. **<u>Cadre théorique.</u>**

Avant toute chose, il convient de définir précisément ce qu'est une ***représentation***.

<u>Définition</u>. Une représentation[1] est, entre autres :

- soit une forme de traduction de la pensée par des relations de correspondance : concepts, images, règles, etc.
- soit la traduction par des signes (ou avec des réseaux de signes) d'une réalité physique ou conceptuelle. La représentation d'un concept peut également devenir symbolique.

Dans l'article intitulé « Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation[2] », Gérard Vergnaud définit ce qu'est la fonction principale de la représentation, qui est de ***conceptualiser le réel pour agir efficacement***. La représentation n'est pas, selon cet auteur, « un épiphénomène, une sorte de reflet après-coup de l'action adaptative du sujet dans son environnement » ; la représentation est, au contraire, fonctionnelle et indispensable au traitement par le sujet de nombreuses situations ; il s'agira alors de faire émerger en situation une conduite nouvelle reposant sur la découverte et l'utilisation par le sujet d'une

[1] http://fr.wikipedia.org/wiki/Représentation
[2] *In* : Psychologie française, t. 30, 3.4, pp. 245-252 (1985)

propriété ou d'une relation pertinente. Il s'agira enfin de ne pas réduire la représentation à des aspects uniquement symboliques ou procéduraux.
Selon Vergnaud, « le concept de représentation est essentiel pour analyser la formation des conceptions et des compétences. Cela suppose l'étude à la fois des systèmes symboliques explicites (conventionnels et non conventionnels) utilisés dans la communication, et des schèmes qui organisent l'activité. Les schèmes forment, au plan du signifié, l'articulation indispensable entre les situations de référence et les signifiants symboliques. Ils sont formés d'invariants, d'inférences, de règles d'actions et de prédictions ».

Suite à ces considérations quelque peu absconses, il convient alors maintenant de trouver des pistes permettant de trouver quelles peuvent être les représentations, au niveau des ***signes***, des ***images*** ou encore des ***tableaux***, des nombres premiers. Pour cela, une recherche bibliographique d'ouvrages de vulgarisation en mathématiques a été nécessaire. De par leur titre et leur table des matières, plusieurs ouvrages se sont avérés être incontournables.

Sur la suite des nombres premiers[3], d'Eugène Ehrhart.
Cet article traite de la ***densité capricieuse*** des nombres premiers et conclut sur le fait que la suite des nombres premiers est chaotique. L'article ne contient que du texte et des formules mathématiques.

L'Univers des nombres[4], de Ian Stewart.
Cet ouvrage traite des nombres premiers au travers de deux chapitres : une entrée en matière par la voie directe dans le chapitre intitulé « L'exploration du Primalimonde» (pp. 89-91), ainsi qu'avec une approche indirecte des nombres premiers via les premiers de Mersenne de la forme $M_p=2^p-1$ (« Diviser pour régner », p. 75). Cependant, il n'y a nulle part une figure représentant les nombres premiers dans cet ouvrage.

Des images pour les nombres[5], d'Odile Kerguéler et Dominique Dumont.
Un chapitre de cet opuscule de 32 pages est consacré aux nombres premiers (pp. 10-11). Il n'y a rien de nouveau sous le soleil : mis à part une courte section sur les nombres premiers jumeaux, le reste de ces deux pages est surtout consacré au crible d'Eratosthène. Une image en marge, de 24 X 26 mm, est une représentation de la spirale d'Ulam (curieusement dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre…) ; cette image est mise là sans autre forme de procès ni explication.

Les nombres premiers[6], de François Jaboeuf.
Dans cet article, la spirale d'Ulam est absolument remarquable. Au lieu de construire une spirale commençant par 1 et continuant rigoureusement selon la figure voulue,

[3] Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (APMEP), no. 407, pp. 683-685, Paris (1996)
[4] Pour La Science, Paris (2000)
[5] ACL – Les Editions du Kangourou, Paris (2001)
[6] Histoire de problèmes, histoire des mathématiques, Commission inter-I.R.E.M. : épistémologie et histoire des mathématiques. Ellipses. Chap. 14, pp. 355-383.

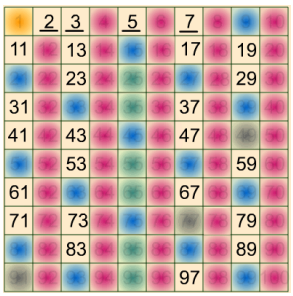
la spirale publiée ici commence par le chiffre 41 pour ensuite continuer de manière rigoureuse en spirale, comme voulu. Les nombres 41, 43 47, 53, 61, 71, 83, 87, …, 251, etc. sont situés sur UNE diagonale de la spirale. Cette représentation de la spirale d'Ulam n'est, à ma connaissance, représentée nulle part ailleurs ainsi.

Merveilleux nombres premiers[7], de Jean-Paul Delahaye.
C'est l'ouvrage de référence en français en ce qui concerne les nombres premiers. Au fil de ses 336 pages, nous trouvons plusieurs représentations graphiques des nombres premiers : l'incontournable crible d'Eratosthène (pp. 25-28), la spirale d'Ulam (pp. 29-30), le crible géométrique de Matiiassevitch (p. 33) et le tableau des nombres premiers entre eux (pp. 50-51). Un chapitre entier intitulé « les amateurs fous de nombres premiers » fait suite à ces différentes représentations (pp. 102-103) ; ces deux pages sont extrêmement troublantes, puisque nous lisons plutôt, dans ce texte dégoulinant de mauvaise foi un règlement de comptes et un dénigrement à l'encontre d'un mathématicien et chimiste du nom de Peter Plichta. Ces deux pages sont tellement surprenantes qu'elles se doivent d'être reproduites en annexe, dans leur intégralité. Nous apprenons que ce Peter Plichta aurait trouvé une représentation permettant, selon ce dernier de « percer le secret de l'univers ». Puisque l'ouvrage de J.-P. Delahaye ne montre que la page de couverture du livre de Plichta, j'avais en son temps contacté ce dernier ; il m'avait répondu en me fournissant une copie dédicacée de sa « croix des nombres premiers ». J'en tombe encore sur ma chaise à chaque fois que je la contemple.

* * *

Ainsi, il ressort de cette recherche bibliographique que trois représentations majeures et accessibles des nombres premiers peuvent être faites. Il s'agit de :

Le crible d'Eratosthène.
Ce crible est une représentation que les élèves se devraient de connaître. En effet, dans leur enseignement des nombres premiers, la plupart des enseignants de mathématiques mentionnent aux élèves le moyen de trouver ces nombres en utilisant ce crible.
Quel que soit la taille de l'image finale, l'algorithme pour le générer est toujours le même ; les nombres premiers ne dessinent pas de figure « remarquable » (en l'état actuel des connaissances).
(http://fr.wikipedia.org/wiki/Eratosthène)
(http://perso.orange.fr/therese.eveilleau/pages/truc_mat/pratique/textes/crible_an.htm)

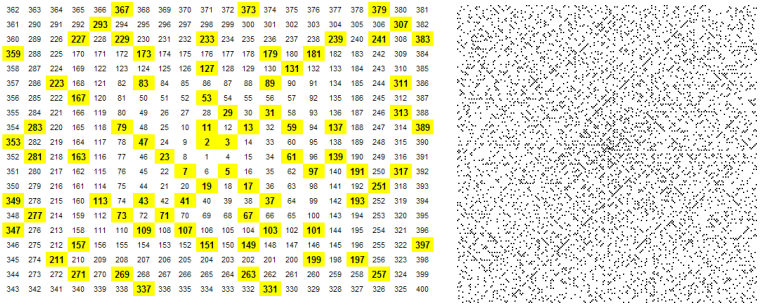


[7] Pour La Science, Paris (2000)

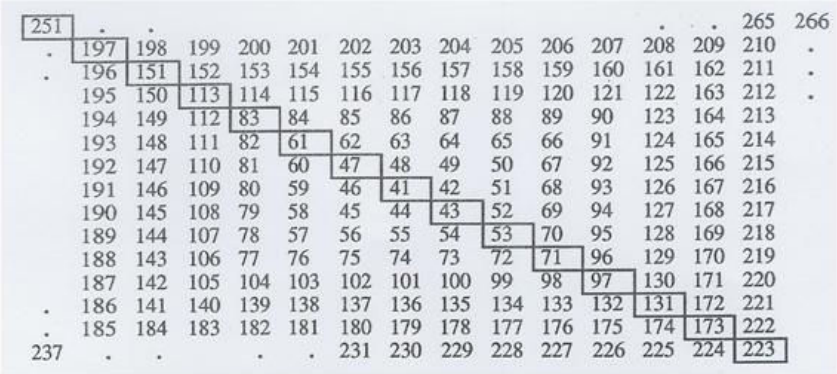
La spirale d'Ulam.

Cette figure en forme de spirale, comme son nom l'indique, a été découverte en 1963 par le mathématicien Stanislaw Marcin Ulam. Cela consiste à représenter les entiers successifs, en général à partir de 1, en une spirale croissant vers l'extérieur, où l'on souligne les nombres premiers. Il semblerait que des diagonales riches en nombres premiers, encore incomprises, apparaissent alors.
(http://fr.wikipedia.org/wiki/Spirale_d'Ulam)

La spirale d'Ulam « classique », c'est-à-dire commençant par le chiffre 1, est la suivante :



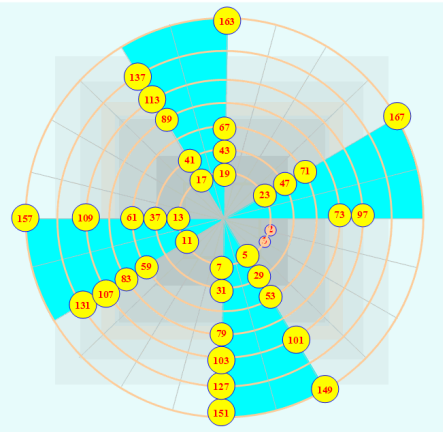
La spirale d'Ulam décrite dans l'article de Jaboeuf est différente et est manifestement bien plus remarquable ! En commençant avec le chiffre 41, nous obtenons la figure suivante (les nombres premiers hors de la diagonale sont curieusement omis) :

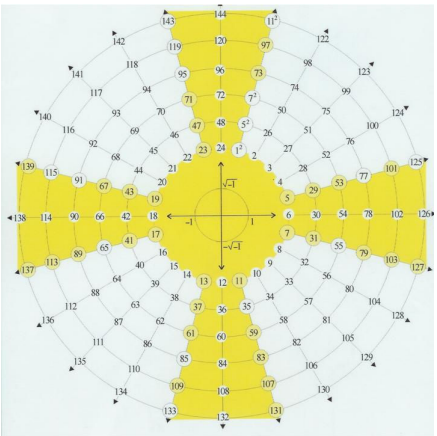


251	.	.											.	.	265	266
.	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	.
.	196	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	211	.
	195	150	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	163	212	.
	194	149	112	83	84	85	86	87	88	89	90	123	164	213	
	193	148	111	82	61	62	63	64	65	66	91	124	165	214	
	192	147	110	81	60	47	48	49	50	67	92	125	166	215	
	191	146	109	80	59	46	41	42	51	68	93	126	167	216	
	190	145	108	79	58	45	44	43	52	69	94	127	168	217	
	189	144	107	78	57	56	55	54	53	70	95	128	169	218	
	188	143	106	77	76	75	74	73	72	71	96	129	170	219	
	187	142	105	104	103	102	101	100	99	98	97	130	171	220	
.	186	141	140	139	138	137	136	135	134	133	132	131	172	221	
.	185	184	183	182	181	180	179	178	177	176	175	174	173	222	
237	.	.		.	.	231	230	229	228	227	226	225	224	223	

La « croix des nombres premiers ».

Celle-ci a été découverte par le chimiste Peter Plichta en 1991. Elle est absolument admirable puisqu'elle montre huit sous-familles de nombres premiers présents sur 8 des 24 axes d'un cercle. Un motif en croix de Malte apparaît, croix qui va bien au-delà du chiffre 144 (en fait jusqu'à l'infini).
(http://de.wikipedia.org/wiki/Peter_Plichta)





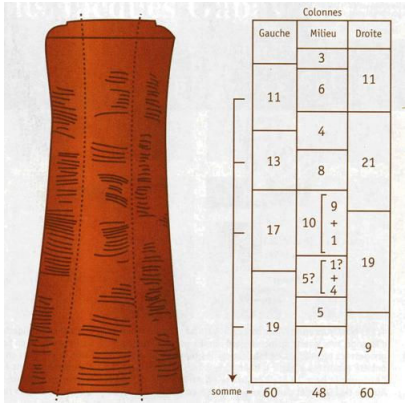
3. **Descriptif du dispositif mis en place.**

Ce travail a été réalisé le 29 novembre dans une classe de 9ème année voie B au collège Jean Kratzer de Vevey (classe de M. Assal).

Cette période d'enseignement s'est déroulée comme suit :

Activité	Description et commentaires	t
Que sont les nombres premiers ?	Il s'agit de questionner les élèves et de leur demander d'apporter leur réponse par écrit. Le but de cette démarche et de se rendre compte individuellement si les élèves savent ce que sont les nombres premiers. Leurs réponses sont récoltées avant de passer à la suite.	5 min
Les nombres premiers, ce sont…	Faire répondre les élèves oralement. Inscrire au tableau la suite de nombres premiers de 2 à 43 p. ex. Rappel historique : les nombres premiers sont connus depuis environ 25000 ans : os d'Ishango (image au rétroprojecteur).	2 min
Liste de nombres premiers	Transparent au rétroprojecteur : les quelques centaines de premiers nombres premiers. Ce transparent reste ensuite à la vue des élèves pour la suite du travail	1 min
Consigne	Comment représenter graphiquement, par un dessin, un tableau, une figure géométrique, les nombres premiers ? A votre avis, comment représenteriez-vous visuellement les nombres premiers ? Y a-t-il un moyen de le faire, si oui, lequel ? Informer les élèves que leur travail sera récolté à la fin de la période d'enseignement.	2 min
Travail des élèves	Laisser travailler librement les élèves seuls ou en groupe, selon leur bon vouloir. Récupérer le travail des élèves.	33 min
Autre représentation	Fournir aux élèves les canevas graphique du crible d'Eratosthène, de la spirale d'Ulam et de la croix des nombres premiers. Donner une journée aux élèves pour remplir les cases libres en y mettant en évidence les nombres premiers, dans l'ordre.	2 min

Ci après : l'os d'Ishango (longueur env. 10,2 cm).



4. **Observations sur le terrain.**

En questionnant les élèves, il est apparu qu'ils avaient tous déjà entendu parler des nombres premiers. Ils connaissaient la définition, mais ils ont eu de la peine à définir si le chiffre 1 appartenait ou non à la liste des nombres premiers : la présence ou l'absence du 1 n'a pas fait l'unanimité. Il a donc fallu informer les élèves que par convention le 1 n'appartenait pas aux nombres premiers. Il n'a pas été possible de récolter les réponses des élèves comme prévu, puisque l'enseignant M. Assal les avait préalablement informés qu'ils suivraient « un cours sur les nombres premiers », et non un cours « avec M. Favre ». L'effet de surprise a donc été absent et il a fallu moduler mon intervention en conséquence.

Tous les nombres de 1 à 25 ont été écrits linéairement au tableau, et ensuite les nombres premiers de cette liste ont été entourés avec un trait de couleur. Les élèves ont été d'accord pour dire que ce qu'ils voyaient au tableau pouvait être « ***une*** représentation des nombres premiers ».

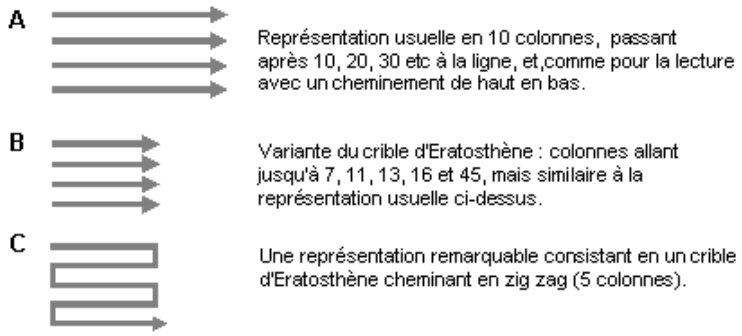
L'image de l'os d'Ishango a ensuite été présentée au rétroprojecteur. Trois ou quatre élèves ont justement suggéré que c'était un os. En demandant à tous les élèves d'estimer l'âge de cet os, la réponse la plus rapprochée de la date réelle a été 1000 ans. Cela était loin du compte puisque la réponse est 25000 ans. Les élèves ont bien observés deux choses : i) que la colonne de droite pouvait représenter la base 10 puisque les nombres gravés sont 10+1, 20+1, 20-1 et 10-1 ; ii) que la colonne gravée de gauche contenait les nombres premiers compris entre 10 et 20.
Les élèves ont été surpris d'apprendre que la connaissance des nombres premiers était déjà l'apanage des hommes 23 millénaires avant notre ère.

Il a fallu répéter la consigne à trois ou quatre reprises pour certains élèves. Quand bien même une proportion importante d'élèves l'avaient comprise immédiatement, environ un tiers des élèves n'ont eu aucune idée de ce qui leur était demandé. Les élèves qui avaient compris la consigne ont immédiatement formé des groupes de deux ou trois et se sont mis à la tâche. Pour les autres élèves, il a fallu aller individuellement vers eux pour leur fournir des indications supplémentaires, en se heurtant parfois à un mur d'incompréhension.

Après env. 20 minutes, les travaux des élèves ont été récoltés, et les canevas graphiques décrits ci-dessus leur ont été remis. Un nombre important d'élèves a manifesté oralement son intérêt de savoir ce que seraient les résultats après avoir rempli ces tableaux ; il est apparu une curiosité manifeste chez la plupart élèves qui, pour beaucoup, ont dit que ce travail sortait de l'habitude.

5. **Analyse.**

Après la première phase en classe, seize travaux d'élèves ont été récoltés. Tous ces travaux indiquent une seule représentation des nombres premiers : en effet, neuf travaux sont réalisés avec le crible d'Eratosthène usuel comprenant dix colonnes, et sept travaux avec une variante de ce crible.



Il ressort donc que dans cette analyse a priori des élèves, c'est le crible d'Eratosthène qui a la primeur dans la représentation des nombres premiers, sans exception.

Après la deuxième phase (travail à domicile), 22 travaux d'élèves ont été récoltés. Il y a eu unanimité pour dire qu' »il n'y a pas de motif », « rien à voir », « rien d'intéressant » dans le crible d'Eratosthène, à une exception près (« les ***chiffres*** premiers se repèrent de manière régulière »).

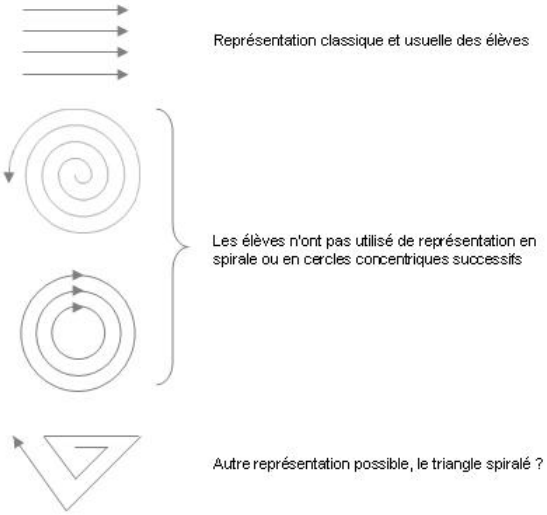
Treize élèves ayant correctement rempli la spirale d'Ulam sont également unanimes à dire qu'ils ont vu une ***diagonale*** dans cette figure, en la nommant expressément. Huit élèves ont colorié une diagonale mais n'ont « rien remarqué ».

Les représentations et observations les plus intéressantes ont été effectuées par les élèves en construisant la croix des nombres premiers. C'est dans cette construction que les commentaires sont les plus variés : « les nombres premiers se trouvent à chaque fois sur les mêmes "lignes" », « les nombres premiers sont seulement sur 8 axes », « les *chiffres* sont sur huit axes et nul autres *chiffres* sont autre part à part le 2 et le 3 », « tous les nombres premiers sur la croix », « ça représente un soleil », « les nombres premiers sont tous sur le dessin plus foncé », et finalement « les nombres premiers sont presque toujours sur la même ligne ». Ainsi, sept élèves ont clairement écrit avoir observé la croix des nombres premiers.
Treize élèves ont correctement colorié les nombres premiers sur la croix, mais ils n'ont pas écrit quoi que ce soit : l'arrangement particulier sur les huit axes leur a échappé.

6. **Discussion.**

Il ressort de ce travail que la représentation usuelle des nombres premiers de la part des élèves se base sur le modèle de la lecture, à savoir des lignes régulières allant de haut en bas et de gauche à droite. Il serait intéressant d'évaluer si cela se limite uniquement aux nombres premiers considérés dans cette étude, ou si cela se généralise à une liste d'autres nombres remarquables [8].

La représentation des nombres premiers suit un schéma classique et usuel : celui de la lecture de texte, allant de haut en bas et de gauche à droite dans nos contrées.



Cette représentation usuelle est très certainement basée sur les ***acquis*** des élèves : ils se souviennent de la procédure de génération du crible d'Eratosthène, et le reproduisent. Un ou deux élèves ont eu l'imagination de procéder en suivant une variante (zig zag, lignes plus courtes) ; cependant, ce cheminement dans la construction se rapproche de la représentation usuelle. Aucun élève n'a a priori utilisé le cheminement intellectuel consistant à employer une spirale, des cercles concentriques, ou tout autre motif géométrique.
Il conviendrait d'effectuer une analyse de la représentation artistique qu'ont les élèves, par une activité interdisciplinaire avec l'enseignant en arts visuels ou dessin au collège. Les modalités de ce travail sont encore à définir précisément.

Une majorité d'élève (13) a remarqué la diagonale cachée dans la spirale d'Ulam, tandis que d'autres élèves (8) n'ont rien remarqué. Il serait intéressant de se demander si ces 13 élèves sont des élèves dits « visuels » et plastiques [9] plutôt que des élèves « auditifs » [10]. Dans ce sens, des analyses plus poussées seraient nécessaires.
Il semblerait, et c'est une hypothèse, qu'il y ait plus d'élèves auditifs que visuels dans la classe considérée. En effet, lorsque la croix des nombres premiers a été

[8] http://pagesperso-orange.fr/yoda.guillaume/index.htm et http://promenadesmaths.free.fr/Fibonacci.htm
[9] http://www.viepedagogique.gouv.qc.ca/numeros/136/vp136.pdf, pp. 39-42
[10] Géninet, A. *La gestion mentale en mathématiques* . Paris : Éditions Retz Nathan (1993).

correctement dessinée, seuls 7 élèves l'ont vue. Treize élèves l'ont bien dessinée mais ne l'ont pas remarquée. Ces élèves sont-ils des « auditifs » au sens strict, ou bien une analyse plus attentive leur aurait-elle fourni la réponse ? Il aurait fallu pour cela leur demander combien de temps ils ont investi pour ce travail.

Les ***images mentales*** sont des produits de l'expérience vécue et intériorisée [11]. Dans cet article, il est dit que « *si les mathématiciens font tous référence à la logique pour démontrer des théorèmes, la très grande majorité des mathématiciens, font également mention de leurs pensées créatives en faisant mention d'images mentales [LE GUEN 1999-1]. Certains calculateurs prodiges voient les nombres en images. Leur mémoire des nombres, le stockage des calculs intermédiaires lors d'une opération (addition, soustraction, multiplication, division), et les relations entre nombres, s'appuient sur une imagerie qui leur est personnelle*. Plus loin (p. 27) : « *En France les travaux de Dehaene et Houdé objectivés par les techniques d'imagerie cérébrale fonctionnelle, apportent des résultats sérieux sur l'activité des aires et des sous-unités cérébrales recrutées lors de manipulations simples de nombres* ».

Serait-il alors possible, dans l'étude de la représentation des nombres premiers par les élèves, de définir si les résultats obtenus se rapprochent du modèle dit « triple-code » de Dehaene-Cohens (note 10, p. 29), modèle rendant visibles les possibilités de communication entre les trois représentations ***analogiques, visuelles ou verbale ?*** Il conviendrait alors pour cela de définir plus précisément quelles sont les stratégies opérationnelles chez les élèves ; ce travail dépasse le cadre de cette étude.

Ce travail sur les nombres premiers peut s'inscrire dans le cadre de la ***créativité*** en mathématiques : Henri Poincaré était un défenseur de l'éminence de l'***intuition***. Selon lui, « *c'est par l'intuition qu'on invente et par la logique qu'on démontr*e ». Quand bien même i) il n'y a pas eu chez les élèves étudiés ici « ***illumination*** [12]» pour trouver une représentation graphique inusuelle des nombres premiers parmi les élèves et ii) qu'en tout état de cause, quand bien même les élèves n'ont pas eu les représentations mentales attendues des nombres premiers (spirale, cercles concentriques successifs, autres), il n'en demeure pas moins que « *les images mentales sont des objets mentaux mais également des outils qu'utilise le cerveau au même titre que le langage et la logique. Ne pas en avoir conscience pour certains, n'implique pas leur inexistence biologique* » (note 10, p. 31). Il suffirait donc que l'enseignant apporte aux élèves des concepts de représentations variés pour que peut-être des formes adéquates ressortent ultérieurement dans les représentations que se font les élèves de suites mathématiques.
L'intuition est effectivement une « émergence » aléatoire. Puisque « *chaque cerveau est le produit de sa propre histoire, affective psychique et culturelle et dans cette perspective optimiste et biologiste chaque cerveau est potentiellement créateur* » (note 10, p. 33), une représentation, disons-le sans détours, ***artistique*** pour l'œil humain, aurait pu apparaître dans les résultats fournis par les élèves. Cela n'a pas été le cas cette fois-ci, mais cela pourrait émerger avec un échantillonnage plus représentatif.

[11] ftp://mse.univ-paris1.fr/pub/mse/cahiers2005/R05081.pdf, p. 22.
[12] Poincaré H. (1908), « *L'Invention Mathématique* », conférence publiée dans le Bulletin de l'Institut Général Psychologique, 8ème année, n°3, mai-juin 1908, p.175-187.