Métropole La Réunion septembre 2008

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.
La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
La règle du jeu est la suivante :

• Le joueur mise 1 € et lance la roue A.
• S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
• S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Soient E et F les évènements :

E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges »
F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».
Montrer que $p(\text{E}) = 0{,}02$ et $p(\text{F}) = 0{,}17$.

3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.

X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel le joueur mise 1 €).

a. Déterminer la loi de probabilité de X.
b. Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

4. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)

a. Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que $p_n = 1 - (0{,}9)^n$.
b. Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.
c. Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n \geq 0{,}9$?

EXERCICE 2 3 points Commun à tous les candidats

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle $(E) : x f'(x) - (2x + 1) f(x) = 8x^2$.

1. a. Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $(E') : y' = 2y + 8$.

b. Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = x\,h(x)$ est solution de (E).

2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E),

3. Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point A(ln 2 ; 0) ? Si oui la préciser.

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{2}$. On note I son centre et J le milieu de [A I].

1. C est le barycentre des points pondérés (A, m), (B, 1) et (D, 1) lorsque :

a. $m = -2$ **b.** $m = 2$ **c.** $m = -1$ **d.** $m = 3$

2. a. B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

b. Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\dfrac{2}{3}$.

c. Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I.

d. J est l'image de I par la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{DB}$

3. L'ensemble des points M du plan tels que $\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \right\| = AB$ est :

a. la médiatrice de [AC].
b. le cercle circonscrit au carré ABCD.
c. la médiatrice de [AI].
d. le cercle inscrit dans le carré ABCD.

4. L'ensemble des points M du plan tels que : $(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 0$ est :

a. la médiatrice de [AC].
b. le cercle circonscrit au carré ABCD.
c. la médiatrice de [AI].
d. le cercle inscrit dans le carré ABCD.

EXERCICE 4 4 points Commun à tous les candidats

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $J_n = \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.

2. *Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par : $I_n = \int_1^n (t+1)\,e^{-t}\,dt$.

a. Justifier que, pour tout $t \geq 1$, on a $\sqrt{t+1} \leq t+1$.

b. En déduire que $J_n \leq I_n$.

c. Calculer I_n en fonction de n. En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n).

d. Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

EXERCICE 5 5 points Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On réalisera une figure en prenant 4 cm comme unité graphique sur chaque axe.

On considère le point A d'affixe $z_A = 1$.

Partie A

k est un réel strictement positif ; f est la similitude directe de centre O de rapport k et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On note $A_0 = A$ et pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = f(A_n)$.

1. a. Étant donné un point M d'affixe z, déterminer en fonction de z l'affixe z' du point M' image de M par f.

b. Construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 dans le cas particulier où k est égal à $\frac{1}{2}$.

2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier n, l'affixe z_n du point A_n est égale à $k^n\,e^{i\frac{n\pi}{3}}$.

b. En déduire les valeurs de n pour lesquelles le point A_n appartient à la demi droite $(O\,;\vec{u})$ et, dans ce cas, déterminer en fonction de k et de n l'abscisse de A_n.

Partie B

Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Désormais, k désigne un entier naturel non nul.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.

2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^6 est un multiple de 2008.

3. Pour quelles valeurs des entiers n et k le point A_n appartient-il à la demi droite $(O\,;\vec{u})$ avec pour abscisse un nombre entier multiple de 2008 ?

EXERCICE 5 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On réalisera une figure en prenant 2 cm comme unité graphique sur chaque axe.

On considère les points A, B et I d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = 5$ et $z_I = 3 + i$.

On note (C) le cercle de centre O et de rayon 1, (Δ) la médiatrice de [AB] et (T) la tangente au cercle (C) en A.

À tout point M d'affixe z, différent de A, on associe le point M′ d'affixe z' telle que : $z' = \frac{z-5}{z-1}$.

Le point M′ est appelé l'image de M.

Partie A

1. Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point I′ image de I. Vérifier que I′ appartient à (C).

2. *a.* Justifier que pour tout point M distinct de A et B, on a : $OM' = \frac{MB}{MA}$.

b. Justifier que pour tout point M distinct de A et B, on a : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Dans la suite de l'exercice, M désigne un point quelconque de (Δ). On cherche à construire géométriquement son image M′.

1. Démontrer que M′ appartient à (C).

2. On note (d) la droite symétrique de la droite (AM) par rapport à la tangente (T). (d) recoupe (C) en N.

a. Justifier que les triangles AMB et AON sont isocèles.

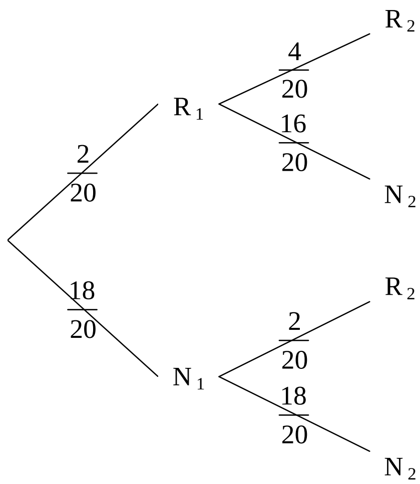
Après avoir justifié que $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AN}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})$ démontrer que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

b. En déduire une construction de M′.

CORRECTION

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

1.



2. $p(E) = p(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{20} \times \frac{4}{20} = \frac{2}{100} = 0{,}02$

$p(F) = p(R_1 \cap N_2) + p(N_1 \cap R_2) = \frac{2}{20} \times \frac{16}{20} + \frac{18}{20} \times \frac{2}{20} = \frac{17}{100} = 0{,}17$

3. $p(X = 9) = p(E) = 0{,}02$

$p((X = 1) = p(F) = 0{,}17$

$p(X = -1) = 1 - (p(E) + p(F)) = 0{,}81$

x	-1	1	9	Total
$p(X = x)$	0,81	0,17	0,02	1
$x\,p(X = x)$	$-0{,}81$	0,17	0,18	$-0{,}46$

E(X) = – 0,46 donc sur un grand nombre de parties, le joueur perd 0,46 €.

4. *a*. L'événement « le joueur lance au moins une fois la roue B » est l'événement contraire de « le joueur lance *n* fois la roue A ».

L'événement « « le joueur lance la roue A » a pour probabilité $\frac{2}{20} = 0{,}1$ donc l'événement « le joueur lance *n* fois la roue A » a pour probabilité : $0{,}9^n$ donc $p_n = 1 - (0{,}9)^n$.

b. $-1 < 0{,}9 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$ donc la suite de terme général p_n est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$

c. $p_n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - (0{,}9)^n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - 0{,}9 \geq (0{,}9)^n \Leftrightarrow \ln 0{,}1 \geq n \ln 0{,}9$ or $\ln 0{,}9 < 0$ donc $p_n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}9}$

$\frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}9} \approx 21{,}85$ et *n* est un entier naturel donc $n \geq 22$.

EXERCICE 2 3 points Commun à tous les candidats

1. *a.* la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{x\,f'(x) - f(x)}{x^2}$

si f est solution de (E) alors pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $x\,f'(x) - (2x+1)\,f(x) = 8x^2$ donc $x\,f'(x) - f(x) = 8x^2 + 2x\,f(x)$

donc $g'(x) = \dfrac{8x^2 + 2x\,f(x)}{x^2}$ donc $g'(x) = 8 + 2\,\dfrac{f(x)}{x}$ soit $g'(x) = 8 + 2\,g(x)$

donc si f est solution de (E) alors g est solution de l'équation différentielle (E') : $y' = 2y + 8$.

b. la fonction f définie par $f(x) = x\,h(x)$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = h(x) + x\,h'(x)$
si h est solution de (E') alors pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $h'(x) = 2\,h(x) + 8$ donc $f'(x) = h(x) + x\,(2\,h(x) + 8)$
soit $f'(x) = (2x+1)\,h(x) + 8x$ donc $x\,f'(x) = (2x+1)\,x\,h(x) + 8x^2$
or pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $x\,h(x) = f(x)$ donc $x\,f'(x) = 8x^2 + 2x\,f(x)$ soit $x\,f'(x) - (2x+1)\,f(x) = 8x^2$.
si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = x\,h(x)$ est solution de (E).

2. Les solutions de (E') sont les fonctions h de la forme $h(x) = C\,e^{2x} - 4$ avec C constante réelle.

D'après les questions précédentes, f est solution de (E) si et seulement si la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ est solution de (E')

$\Leftrightarrow g(x) = \dfrac{f(x)}{x} = C\,e^{2x} - 4$ avec C constante réelle $\Leftrightarrow f(x) = C\,x\,e^{2x} - 4x$ avec C constante réelle.

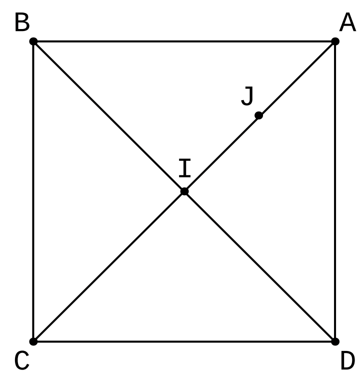
3. On doit avoir $f(\ln 2) = 0$ soit $C \ln 2\, e^{2\ln 2} - 4\ln 2 = 0$ or $2\ln 2 = \ln(2^2) = \ln 4$ donc $e^{2\ln 2} = e^{\ln 4} = 4$
donc $4C\ln 2 - 4\ln 2 = 0$ donc $C = 1$; la fonction f définie par $f(x) = x\,e^{2x} - 4x$ est solution de l'équation différentielle (E), et sa représentation graphique dans un repère donné passe par le point A(ln 2 ; 0).

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

1. Réponse *c*.

Le barycentre G des points pondérés (A, m), (B, 1) et (D, 1) vérifie pour tout point M du plan : $(m+1+1)\overrightarrow{MG} = m\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

en particulier si M = A alors $(m+2)\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ donc G = C si et seulement si $m + 2 = 1$ soit $m = -1$.



2. *a.* **FAUX** B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

b. **FAUX** $\overrightarrow{CJ} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{CI}$ donc le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\dfrac{3}{2}$.

c. **FAUX** s(D) = B, s(B) = D et s(A) = C. Le triangle DAB par la symétrie de centre I est transformé en le triangle CBD

d. **VRAI** $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{DB} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{IJ}$ donc J est l'image de I par la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{DB}$

3. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\,\overrightarrow{MI}$ donc $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\| = AB \Leftrightarrow 2\,MI = AC = 2\,IA \Leftrightarrow MI = IA \Leftrightarrow$ M décrit le cercle de centre I passant par A

L'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\| = AB$ est le cercle circonscrit au carré ABCD.

4. L'ensemble des points M du plan tels que : $(2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})\,.\,(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 0$ est :

$2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\,\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MI} = 4\,\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\,\overrightarrow{MI}$ donc $(2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})\,.\,(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 4\,\overrightarrow{MJ}\,.\,2\,\overrightarrow{MI} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MJ}\,.\,\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow$ le triangle MIJ est rectangle en M $\Leftrightarrow$ M décrit le cercle de diamètre [IJ] donc le cercle circonscrit au carré ABCD.

EXERCICE 4 4 points Commun à tous les candidats

1. $J_{n+1} - J_n = \displaystyle\int_1^{n+1} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt - \int_1^{n} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt = \int_n^{n+1} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$

La fonction $t \to e^{-t}\sqrt{1+t}$ est continue positive sur $[1\,;+\infty[$ $\displaystyle\int_n^{n+1} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt \geq 0$, donc $J_{n+1} - J_n \geq 0$

La suite (J_n) est croissante.

2. *a.* $t \geq 1$ donc $t + 1 \geq 1$ donc $\sqrt{t+1} \geq 1$ donc en multipliant les termes de cette inégalité par $\sqrt{t+1}$.

Pour tout $t \geq 1$, on a $\sqrt{t+1} \leq t+1$.

b. Pour tout $t \geq 1$, on a $\sqrt{t+1} \leq t+1$ donc $e^{-t}\sqrt{1+t} \leq (t+1)\,e^{-t}$

les fonctions $t \to e^{-t}\sqrt{1+t}$ et $t \to (t+1)\,e^{-t}$ sont continues sur $[1\,;+\infty[$ donc $\displaystyle\int_1^{n} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt \leq \int_1^{n} (t+1)\,e^{-t}\,dt$ soit $J_n \leq I_n$

c. Soit $\begin{cases} u'(t) = e^{-t} & \text{alors} \quad u(t) = -e^{-t} \\ v(t) = t+1 & \text{alors} \quad v'(t) = 1 \end{cases}$ donc $I_n = \left[-(t+1)\,e^{-t}\right]_1^n - \displaystyle\int_1^n -e^{-t}\,dt$

$I_n = -(n+1)\,e^{-n} + 2\,e^{-1} - \left[e^{-t}\right]_1^n = -(n+1)\,e^{-n} + 2\,e^{-1} - e^{-n} + e^{-1} = 3\,e^{-1} - (n+2)\,e^{-n}$

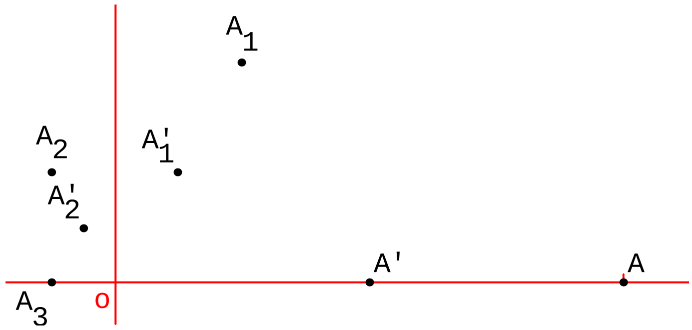
Pour tout $n \geq 1$, $(n+2)\,e^{-n} > 0$ donc $I_n \leq 3\,e^{-1}$ or $J_n \leq I_n$ donc $J_n \leq 3\,e^{-1}$. La suite (J_n) est majorée par $3\,e^{-1}$.

d. La suite (J_n) est croissante majorée par $3\,e^{-1}$ donc converge et sa limite est positive et inférieure ou égale à $3\,e^{-1}$.

EXERCICE 5 5 points Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. *a.* $z' - 0 = k\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z - 0) \Leftrightarrow z' = k\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} z$

b. f est la similitude directe de centre O de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. donc f est la composée de l'homothétie de centre O de rapport $\frac{1}{2}$, et de la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{3}$, il suffit donc de construire le point A' image de A par l'homothétie de centre O de rapport $\frac{1}{2}$, puis le point A_1 image de A' par la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{3}$.

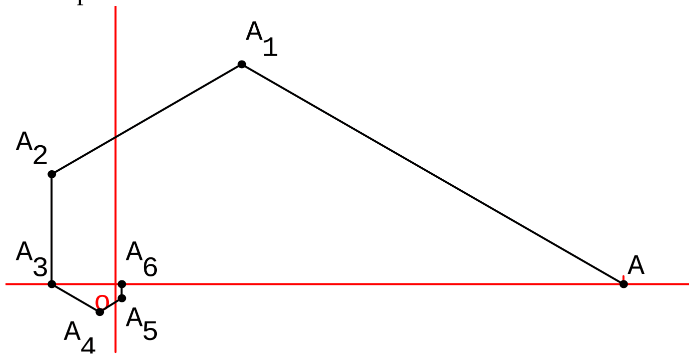


2. *a.* Vérification, si $n = 0$, $z_0 = 1 = k^0\ \mathrm{e}^{0\,\mathrm{i}} = k^0\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{0\,\pi}{3}}$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

Montrons que la propriété est héréditaire, c'est-à-dire que pour tout n, si $z_n = k^n\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}$ alors $z_{n+1} = k^{n+1}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+1)\pi}{3}}$

$z_{n+1} = k\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} z_n$ or $z_n = k^n\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}$ donc $z_{n+1} = k^{n+1}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+1)\pi}{3}}$

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.



b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $A_n \neq O$ donc $z_n \neq 0$

$A_n \in (O\,; \vec{u}) \Leftrightarrow \arg(z_n) = 0 + p\,\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \frac{n\,\pi}{3} = p\,\pi$

$n \in$ N donc $A_n \in (O\,; \vec{u}) \Leftrightarrow n = 3\,p\ (p \in \mathbb{N})$

Partie B

1. $2008 = 8 \times 251$

251 est compris entre 15^2 et 16^2 et n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à 15 (2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13) donc est premier. $2008 = 2^3 \times 251$

2. Soit une décomposition en produit de facteurs premiers de k, k^6 est un multiple de 2008 donc 2 et 251 figurent dans cette décomposition donc $k = 2 \times 251 \times n$

$k^6 = 2^6 \times 251^6 \times n^6$

k^6 est le plus petit multiple de 2008 si et seulement si $n = 1$: alors $k = 2 \times 251 = 502$

3. $A_n \in (O\,; \vec{u}) \Leftrightarrow n = 3\,p\ (p \in \mathbb{N})$

L'abscisse de A_n est un entier multiple de 2008 $\Leftrightarrow k^n$ est un multiple de 2008 or $n = 3\,p\ (p \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow k^{6p}$ est un multiple de 2008.

$k^0 = 1$ donc ceci est impossible pour $p = 0$, si $p = 1$, k^6 est un multiple de 2008 $\Leftrightarrow k$ est un multiple de 502 d'après la question précédente. Si $p \geq 2$, $k^{6p} = k^{6(p-1)} \times k^6$ or k^6 est un multiple de 2008 donc k^{6p} est un multiple de 2008

Le point A_n appartient à la demi droite $(O\,; \vec{u})$ avec pour abscisse un nombre entier multiple de 2008 si et seulement si k est un multiple de 502 et $n = 3\,p\ (p \in \mathbb{N}^*)$.

EXERCICE 5 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

On réalisera une figure en prenant 2 cm comme unité graphique sur chaque axe.

On considère les points A, B et I d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = 5$ et $z_I = 3 + \text{i}$.

On note (C) le cercle de centre O et de rayon 1, (Δ) la médiatrice de [AB] et (T) la tangente au cercle (C) en A.

À tout point M d'affixe z, différent de A, on associe le point M′ d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{z-5}{z-1}$.

Le point M′ est appelé l'image de M.

Partie A

1. $z_{\text{I}'} = \dfrac{3+\text{i}-5}{3+\text{i}-1} = \dfrac{-2+\text{i}}{2+\text{i}} = \dfrac{-(2-\text{i})^2}{5} = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}\text{i}$

$|z_{\text{I}'}|^2 = \left(-\dfrac{3}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = 1$ donc OI' = 1 donc I′ appartient à (C).

2. *a.* $z' = \dfrac{z-5}{z-1}$ donc $|z'| = \left|\dfrac{z-5}{z-1}\right| = \left|\dfrac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right|$ donc pour tout point M distinct de A, on a : OM′ = $\dfrac{\text{MB}}{\text{MA}}$.

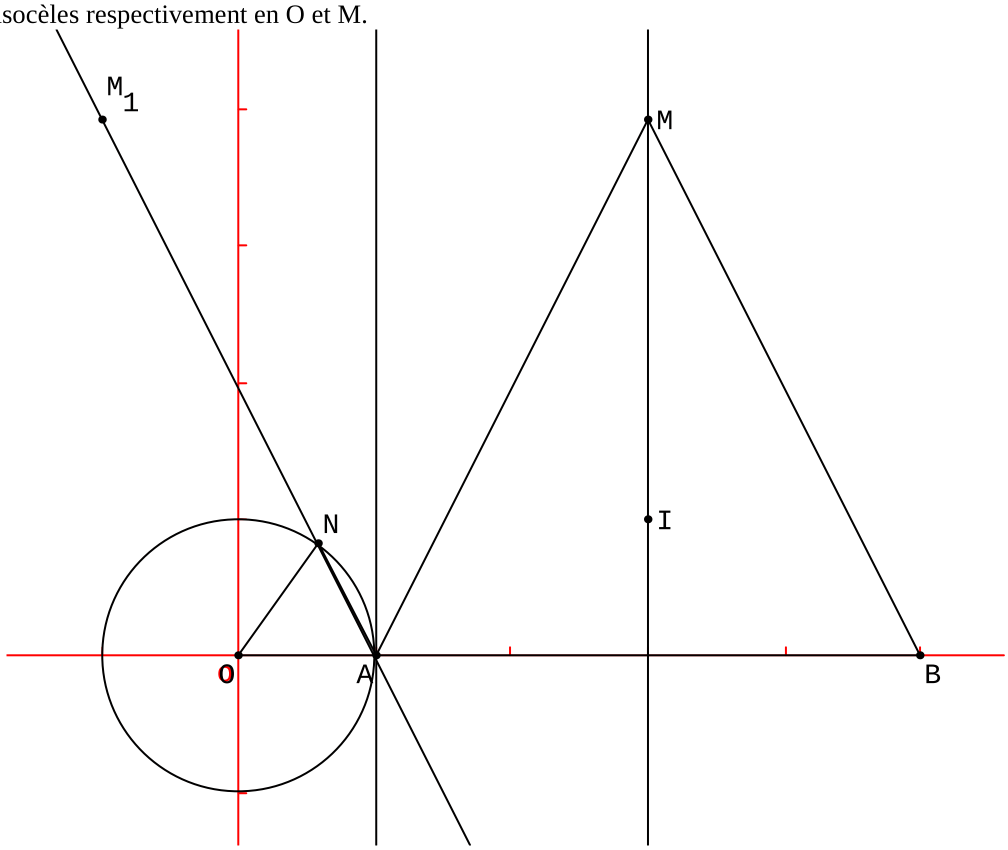
b. si $z \neq 1$ et $z \neq 5$ alors $z' = \dfrac{z-5}{z-1}$ donc $\arg(z') = \arg\left(\dfrac{z-5}{z-1}\right)$ à 2 π près soit $\arg(z') = \arg\left(\dfrac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right)$ à 2 π près

$\overrightarrow{\text{OA}} = \vec{u}$ donc pour tout point M distinct de A et B, on a : $(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OM'}}) = (\overrightarrow{\text{MA}}, \overrightarrow{\text{MB}})$.

Partie B

1. M est un point quelconque de (Δ) donc MA = MB or OM′ = $\dfrac{\text{MB}}{\text{MA}}$ donc OM' = 1 donc M′ appartient à (C).

2. *a.* M appartient à la médiatrice de [AB] donc MA = MB, A et N sont deux points du cercle (C) donc OA = ON donc les triangles AMB et AON sont isocèles respectivement en O et M.



Soit M_1 et B_1 les symétriques des points M et B par rapport à la tangente (T), alors $(\overrightarrow{\text{AM}}, \overrightarrow{\text{AB}}) = -(\overrightarrow{\text{AM}_1}, \overrightarrow{\text{AB}_1})$

N ∈ [AM_1] et $B_1 \in$ [AO] donc $(\overrightarrow{\text{AM}}, \overrightarrow{\text{AB}}) = -(\overrightarrow{\text{AN}}, \overrightarrow{\text{AO}})$.

Les triangles OAN et ABM sont isocèles respectivement en O et M, de même sens donc $(\overrightarrow{\text{BM}}, \overrightarrow{\text{BA}}) = (\overrightarrow{\text{NO}}, \overrightarrow{\text{NA}})$.

Par symétrie autour de (T), $(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{ON}}) = (\overrightarrow{\text{MA}}, \overrightarrow{\text{MB}})$.

b. N vérifie les conditions N ∈(C) et $(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{ON}}) = (\overrightarrow{\text{MA}}, \overrightarrow{\text{MB}})$ donc M' = N pour construire M′, on peut donc : construire le symétrique M_1 de M par rapport à (T), la droite (AM_1) recoupe (C) en M'.