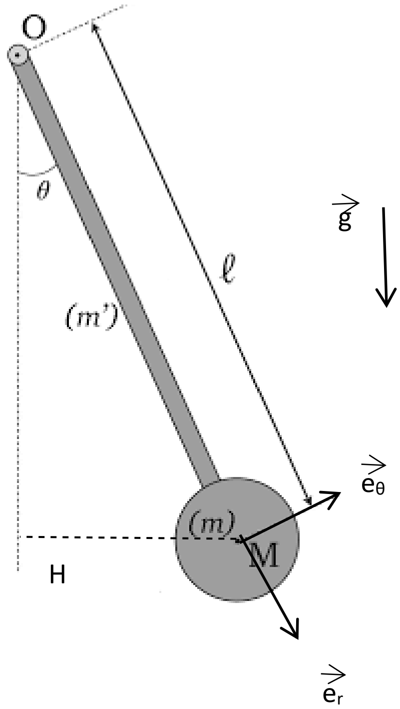
L’EQUATION DU PENDULE

Contexte : On dispose d’une masse ponctuelle m reliée à un fil sans masse, inextensible et sans raideur. La masse est lâchée sans vitesse avec un certain angle par rapport à la verticale non nul. On cherche à déterminer l’évolution de cette masse au cours du temps.

Pour ce faire, on se place en coordonnées polaires :

On note θ l’angle fait entre le fil et la verticale. On cherche ainsi à déterminer l’évolution θ(t), dans le cas sans frottements.



1) Faire le bilan des forces extérieures appliquées au point M dans la base (O, $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$)

2) La position du point M est $\overrightarrow{OM} = l\vec{e_r}$

Montrer alors que la vitesse du point M s’écrit : $\overrightarrow{V(M)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = l\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

Montrer de même que l’accélération du point M s’écrit :

$$\overrightarrow{a(M)} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = -l\dot{\theta}^2\vec{e_r} + l\ddot{\theta}\vec{e_\theta}$$

Indication : On pourra d’abord remarquer que les vecteurs $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ varie d’orientation au cours du temps. On calculera donc leur dérivée par rapport au temps.

3) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la masse m dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. En déterminer une équation différentielle du deuxième ordre. On posera $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$

4) On suppose que le pendule oscille avec un angle θ petit (On prend $\theta \ll 1\,rad$). Sous ces hypothèses on peut dire que $sin(\theta) \simeq \theta$. En déduire que l’équation précédente peut se mettre sous la forme d’une équation d’oscillateur harmonique.

5) Résoudre cette équation différentielle ainsi obtenue en prenant comme conditions aux limites : $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

6) En reprenant les équations obtenues à la question 2), déterminer l’énergie cinétique de la masse ainsi que son énergie potentielle. On fixera pour cette dernière $E_p(O) = 0$.

Corrigé :

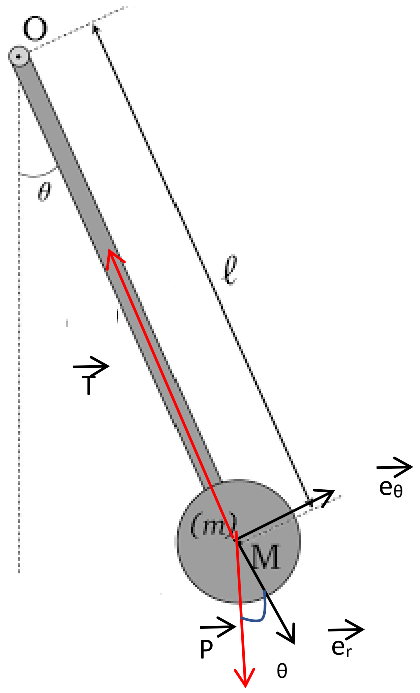
1) Action de la pesanteur : Pour la déterminer dans la base polaire, il est nécessaire de projeter le vecteur intensité de pesanteur $\vec{g}$ dans cette base.

Ainsi $\vec{g} = -gcos(\theta)\overrightarrow{e_r} + gsin(\theta)\overrightarrow{e_\theta}$ et comme $\vec{P} = m\vec{g}$, on en déduit :

$\vec{P} = -mg(sin(\theta)\overrightarrow{e_r} + cos(\theta)\overrightarrow{e_\theta})$

Tension du fil : On ne prendra pas en compte le signe lié à cette force :

$\vec{T} = T\overrightarrow{e_r}$



2) Calculons les dérivées par rapport au temps des vecteur $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$:

$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\frac{d\theta}{d\theta} = \frac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$ or, $\overrightarrow{e_r} = cos(\theta)\overrightarrow{e_x} + sin(\theta)\overrightarrow{e_y}$

et $\overrightarrow{e_\theta} = -sin(\theta)\overrightarrow{e_x} + cos(\theta)\overrightarrow{e_y}$ donc, $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta} = \overrightarrow{e_\theta}$ et $\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta} = -\overrightarrow{e_r}$

donc $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ et $\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

comme $\overrightarrow{OM} = l\overrightarrow{e_r}$, on en déduit que : $\boxed{\overrightarrow{V(M)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = l\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}}$

On procède de même avec l'accélération et on trouve :

$$\boxed{\overrightarrow{a(M)} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = -l\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + l\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}}$$

3) D'après le principe fondamental de la dynamique :

$\vec{a}(M) = \vec{P} + \vec{T}$ en projetant cette équation selon $\overrightarrow{e_\theta}$, on trouve :

$l\ddot{\theta} = -g sin(\theta)$ soit en posant $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 sin(\theta) = 0}$$

4) En utilisant l'approximation de la fonction sinus pour des petits angles, on trouve que l'équation du mouvement est régie par une équation d'oscillateur harmonique.

$$\boxed{\ddot{\theta}(t) + \omega_0^2 \theta(t) = 0}$$

5) Comme le second membre de cette équation différentielle est nulle, la solution particulière est elle aussi égale à 0.

On cherche une solution de l'équation homogène (qui correspond à la solution finale) sous la forme $\theta(t) = A cos(\omega_0 t) + B sin(\omega_0 t)$

En utilisant les conditions initiales : $\theta(0) = \theta_0 = A$ et $\dot{\theta}(0) = 0 = \omega_0 B \rightarrow B = 0$

D'où l'équation du mouvement du point M dans le référentiel du laboratoire :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 cos(\omega_0 t)}$$

6) L'énergie cinétique de la masse M est :

$E_c(t) = \frac{1}{2} m \vec{V}(M)^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$

Or $\dot{\theta}(t) = -\theta_0 \omega_0 sin(\omega_0 t)$ donc, $\boxed{E_c(t) = \frac{1}{2} m l^2 \omega_0^2 \theta_0^2 \left(sin(\omega_0 t)\right)^2}$

On remarque que cette énergie est minimale (elle est nulle) lorsque $\left(sin(\omega_0 t)\right)^2 = 0$

c'est-à-dire quand $t \equiv \frac{\pi}{\omega_0} mod\, \pi$ ce qui correspond à un angle $\theta = \pm\theta_0$

On trouve donc que l'énergie cinétique est minimale lorsque le pendule est à ses positions extrémales.

Par ailleurs, elle est maximale lorsque $\left(sin(\omega_0 t)\right)^2 = 1$

c'est-à-dire quand $t \equiv \frac{\pi}{2\omega_0} mod\, \pi$ ce qui correspond à un angle $\theta = 0$

On trouve que l'énergie cinétique est maximale lorsque le bras du pendule est aligné avec la verticale.

Pour déterminer l'énergie potentielle de la masse liée à l'action de la pesanteur, il faut déterminer la projection orthogonale du point M sur l'axe vertical. En notant H ce point sur cet axe, on a $OH = mglcos(\theta(t))$

Ainsi, comme $E_p(t) = -mgOH$, $\boxed{E_p(t) = -mglcos(\theta(t))}$

L'énergie potentielle est donc minimale lorsque $\theta = 0$, ce qui correspond au maximum de l'énergie cinétique.

Elle est maximale lorsque θ est maximal ie lorsque $\theta = \pm\theta_0$, ce qui correspond au minimum de l'énergie cinétique.

On peut même dire que le système est <u>conservatif</u>