# CHAPITRE VII

# Le spin de l'électron

## I L'expérience de Stern et Gerlach

### I-1 Rappel de l'expérience

Un jet d'atomes neutres est envoyé entre les pôles d'un électroaimant au sein duquel règne un gradient de champ magnétique $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ dirigé suivant l'axe vertical 0z.

Entre les pôles de l'électro-aimant, un atome portant un moment magnétique $\boldsymbol{M}$ est soumis à une force $F_z$:

$$F_z = M_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Comme indiqué au §II-2 du chapitre V, son point d'impact sur un écran situé à la distance D s'écrit:

$$Z = M_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{d\,D}{Mv^2}$$

où v est la vitesse initiale de l'atome et d la distance qu'il parcourt entre les pôles de l'électro-aimant.

De la mesure de Z, on déduit la valeur de $M_z$.

### I-2 Attente classique

Si la norme du vecteur moment magnétique est $\mu$, la composante $\mu_z$ est comprise entre $-M$ et $+M$ .

Les moments magnétiques étant a priori orientés statistiquement dans toutes les directions, toutes les valeurs de $-M < M_z < +M$ sont représentées et les point d'impact vont se distribuer entre les valeurs extrema de Z.

$$Z_m = \gamma\ m\,\hbar \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{d\,D}{Mv^2}$$

### I-3 Attente "quantique"

L'étude du moment cinétique nous a appris que $L_z$ ne pouvait pas prendre tous les valeurs imaginables classiquement mais qu'elles se restreignait à un multiple de $\hbar$.

Nous avons vu que si l'atome était dans un état tel que le résultat de la mesure du carré du moment cinétique soit $\ell(\ell+1)\hbar^2$, les résultats de mesure de $L_z$ se trouvaient parmi les $2\ell+1$ valeurs $m\,\hbar$ où $\ell < m < \ell$.

Puisque **L** et $\boldsymbol{M}$ sont liés par la relation:

$$\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{L}} = \frac{-|e|}{2\,m_e}$$

Les points d'impact sont attendus aux positions

$$Z_m = m\,\frac{-|e|\hbar}{2\,m_e}\,\frac{\partial B_z}{\partial z}\,\frac{d\,D}{Mv^2}$$

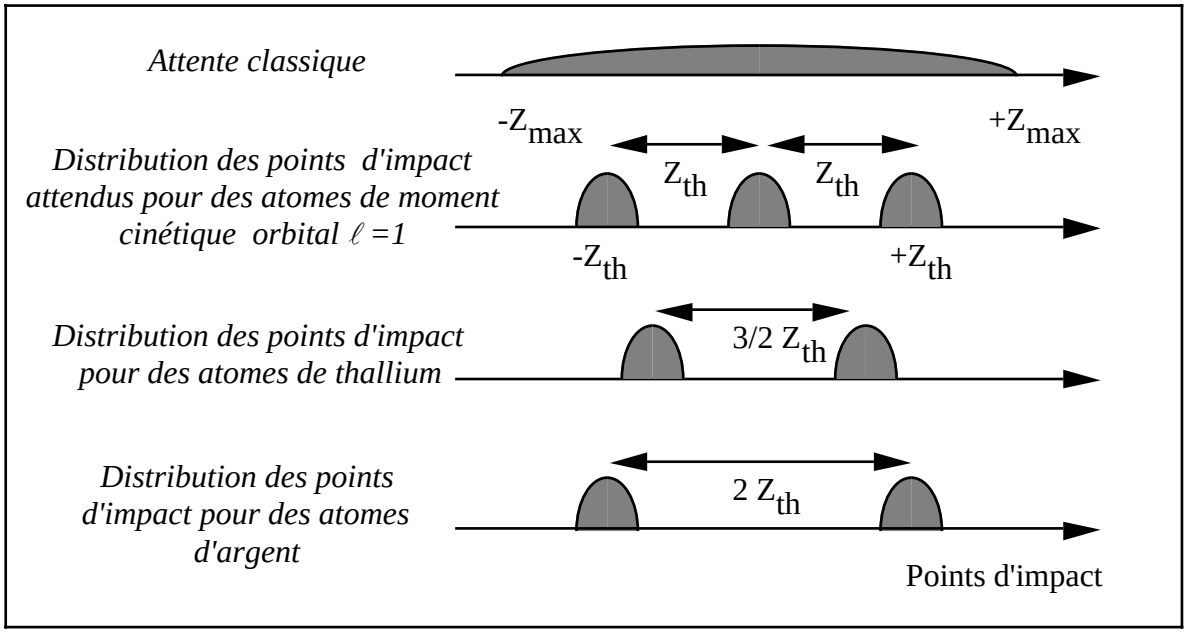
On attend un nombre de points d'impact impair séparés de:

$$\Delta z_{th} = \frac{|e|\hbar}{2\,m_e}\,\frac{\partial B_z}{\partial z}\,\frac{d\,D}{M\,v^2}$$

( ne pas confondre $m_e$ masse de l'électron, M masse de l'atome et m nombre quantique magnétique)

I-4 Résultat de l'expérience

En envoyant des atomes d'argent, Stern et Gerlach obtinrent en 1921 le résultat de la figure ci-dessous. Il apporte une confirmation et présente deux anomalies:




*La confirmation:*

Des taches discrètes et séparées apparaissent sur l'écran: il y a bien une quantification de la composante suivant z du moment magnétique.

*Les anomalies:*

Le nombre de taches est pair.
Les taches sont séparées d'une distance double de la distance attendue $\Delta z=2\Delta z_{th}$

Le résultat obtenu avec des atomes de thallium est représenté à la figure ci dessus.
Il y a toujours deux taches mais elles sont séparées d'une distance $\Delta z=3/2\ \Delta z_{th}$

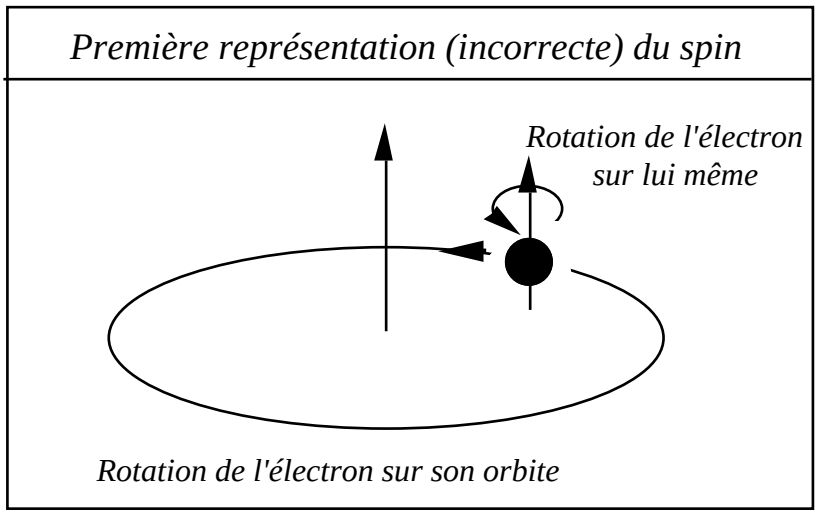
De façon générale, les taches sont discrètes, elles apparaissent en nombres pairs et sont séparées de $\Delta z = \gamma\ \Delta z_{th}$ où $\gamma$ est un rationnel simple compris entre 1 et 2.

## II Hypothèse du spin

Il faut bien se rendre à l'évidence, la quantification du moment cinétique rend compte d'un des aspects des résultats expérimentaux (le fait que les points d'impact des atomes forment des taches séparées), mais sa seule contribution est insuffisante.

Uhlenbeck et Goudsmit qui connaissaient la quantification du moment cinétique imposée par le modèle de Bohr émirent en 1925 l'hypothèse que l'électron tournait sur lui-même et apportait par là même une nouvelle contribution au moment cinétique et donc au moment magnétique.

L'électron apparaissait comme une toupie (en anglais: a spin)




Par la suite, l'image de rotation d'électron sur lui même s'est révélée inexacte.

Il n'en reste pas moins que l'électron présente un moment magnétique intrinsèque indépendant de son mouvement de rotation autour du noyau. Cette contribution est associée à un équivalent de moment cinétique additionnel que l'on continue à appeler spin.

## III Traitement quantique de l'électron

Comme dans le chapitre IV, le formalisme est introduit à l'aide de postulats. De nouveau, sa justification réside dans sa capacité à rendre compte des résultats expérimentaux.

### III-1 Fonction d'onde et état de spin

*Postulat 1*

L'état dynamique d'une particule est décrit par deux êtres mathématiques distincts:

i) une fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$ élément de l'espace $\mathcal{F}$.

ii) un état appelé état de spin $|\chi>$, élément de l'espace vectoriel des états de spin $\mathcal{F}^{sp}$.

La fonction d'onde totale s'écrit:

$$\psi_\chi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) \otimes |\chi>$$

Elle appartient à un espace $\mathcal{F}^t$ produit direct des espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{sp}$.

$$\mathcal{F}^t = \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^{sp}$$

*Postulat 2*

Aux variables orbitales (sont nommées ainsi celles qui possèdent un équivalent classique) sont associés les opérateurs orbitaux $\widehat{\mathbf{A}}$ construits suivant la règle de correspondance.

Ces opérateur agissent uniquement sur les fonctions de $\mathcal{F}$ et donnent des fonctions de $\mathcal{F}$. Si $\phi(\mathbf{r})$ est élément de $\mathcal{F}$, alors $\Phi(\mathbf{r}) = \widehat{\mathbf{A}}\ \phi(\mathbf{r})$ est aussi élément de $\mathcal{F}$.

Aux variables de spin sont associés des opérateurs de spin $\widehat{\mathbf{B}}$ qui agissent exclusivement dans l'espace $\mathcal{F}^{sp}$. Si $|\chi>$ est élément de $\mathcal{F}^{sp}$ alors $|\zeta> = \widehat{\mathbf{B}}\,|\chi>$ est aussi élément de $\mathcal{F}^{sp}$.

En conséquence:

$$\widehat{\mathbf{A}}\ \psi_\chi(\mathbf{r}) = \widehat{\mathbf{A}}\psi(\mathbf{r}) \otimes |\chi>$$

$$\widehat{\mathbf{B}}\ \psi_\chi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) \otimes \widehat{\mathbf{B}}\,|\chi>$$

Et:

$$\widehat{\mathbf{A}}\ \widehat{\mathbf{B}}\psi_\chi(\mathbf{r}) = \widehat{\mathbf{A}}\psi(\mathbf{r}) \otimes \widehat{\mathbf{B}}\,|\chi> = \widehat{\mathbf{B}}\ \widehat{\mathbf{A}}\psi_\chi(\mathbf{r})$$

Les opérateurs de spin commutent avec les opérateurs orbitaux.

III-2 Les opérateurs de spin

Se pose alors une question assez cruciale: comment définir $\mathcal{F}^{sp}$?
Le mieux est sans doute de le faire en introduisant une base de $\mathcal{F}^{sp}$.
Pour ce faire, il faut se donner un ensemble complet d'opérateurs qui commutent.

Où aller chercher ces opérateurs....sinon…dans notre imagination. L'intuition du physicien est l'étincelle qui permet de progresser.

L'introduction des opérateurs de spin provient d'un constat simple:

Une nouvelle contribution au moment magnétique se manifeste.

Or on sait qu'il existe classiquement une relation de proportionnalité entre le moment cinétique et le moment magnétique. Alors par analogie, introduisons une nouvelle contribution au moment cinétique.

Survient une autre question: comment introduire un nouveau moment cinétique qui n'ait pas d'équivalent classique? Comment introduire de nouveaux opérateurs en l'absence de règle de correspondance?

Eh bien définissons les nouveaux opérateurs de type moment cinétique, non pas à partir d'expressions "analytiques" mais à partir de leurs propriétés premières qui sont les relations de commutation fondamentales.

*Postulat 3*

L'opérateur de spin $\mathbf{S}$ est dans $\mathcal{F}^{sp}$ un opérateur de type moment cinétique en ce sens qu'il obéit à toutes les règles de commutation des moments cinétiques.

$$\left[\ \widehat{\mathbf{S}}^2,\ \widehat{\mathbf{S}}_x\ \right] = 0 \qquad \left[\ \widehat{\mathbf{S}}^2,\ \widehat{\mathbf{S}}_y\ \right] = 0 \qquad \left[\ \widehat{\mathbf{S}}^2,\ \widehat{\mathbf{S}}_z\ \right] = 0$$

$$\left[\ \widehat{\mathbf{S}}_x,\ \widehat{\mathbf{S}}_y\right] = i\,\hbar\,\widehat{\mathbf{S}}_z \qquad \left[\ \widehat{\mathbf{S}}_y,\ \widehat{\mathbf{S}}_z\right] = i\,\hbar\,\widehat{\mathbf{S}}_x \qquad \left[\ \widehat{\mathbf{S}}_z,\ \widehat{\mathbf{S}}_x\right] = i\,\hbar\,\widehat{\mathbf{S}}_y$$

En conséquence il existe une base qui diagonalise simultanément $\hat{\mathbf{S}}^2$ et $\hat{\mathbf{S}}_z$ telle que:

$$\hat{\mathbf{S}}^2 \,|\, s\, m_s> \;=\; s\,(\,s+1)\,\hbar^2 \,|\, s\, m_s>$$
$$\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{z}} \;|\, s\, m_s> \;=\; m_s\,\hbar \;|\, s\, m_s>$$

Les états de spin $|\, s\, m_s>$ de l'espace $\mathcal{F}^{sp}$ viennent se substituer aux fonctions $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ de l'espace $\mathcal{F}$. Ils forment la base qui définit $\mathcal{F}^{sp}$.

<u>III-3 Les valeurs propres de spin.</u>

A ce stade nous n'avons aucune indication sur $m_s$ et rien ne dit que $m_s$ est entier. Rappelez-vous, lors de l'étude du moment cinétique, nous avions conclu que m était entier sur des considérations de rotation: $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ devait être égal à $Y_\ell^m(\theta,\varphi+2\pi)$.

Les opérateurs de spin n'ont pas d'équivalents classiques, ils ne font pas apparaître d'angles θ ou φ.

Pour résoudre ce problème, on introduit les opérateurs:

$$\hat{\mathbf{S}}_+ = \hat{\mathbf{S}}_x + i\,\hat{\mathbf{S}}_y \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{S}}_- = \hat{\mathbf{S}}_x - i\,\hat{\mathbf{S}}_y$$

Dont les propriétés sont identiques à celles de $\hat{\mathbf{L}}_+$ et $\hat{\mathbf{L}}_-$. Cela provient du fait que les opérateurs de spin obéissent aux mêmes relations que les opérateurs de moment cinétique.

Il s'ensuit que $\hat{\mathbf{S}}_+$ et $\hat{\mathbf{S}}_-$ appliqués à $|\, s\, m_s>$ donnent:

$$|\, s, m_s-1> \xleftarrow{\hat{\mathbf{S}}_-} |\, s, m_s> \xrightarrow{\hat{\mathbf{S}}_+} |\, s, m_s+1>$$

Et plus précisément.

$$\hat{\mathbf{S}}_+ \,|\, s,\; m_s> \;=\; \sqrt{\;s\,(s+1) - m_s\,(m_s+1)}\;\;\hbar\;|\, s,\; m_s+1>$$

$$\hat{\mathbf{S}}_- \,|\, s,\; m_s> \;=\; \sqrt{\;s\,(s+1) - m_s\,(\,m_s-1)}\;\;\hbar\;|\, s, m_s-1>$$

Afin que la valeur absolue de la composante de spin suivant 0z ne soit jamais supérieure à sa norme $m_s$ et s doivent satisfaire à la relation:

$$|\, m_s \,| \le \sqrt{\;s\,(s+1)}$$

Aussi,( voir § III-6 du chapitre VI) il existe une valeur maximale $m'_s$ pour laquelle $\hat{\mathbf{S}}_+ \,|\, s,\; m'_s> = 0$ et une valeur $m''_s$ minimale pour laquelle $\hat{\mathbf{S}}_- \,|\, s,\; m''_s> = 0$.

Ces impératifs impliquent:

$$s\,(s+1) - m'_s\,(m'_s+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad m'_s = s$$

$$s\,(s+1) - m''_s\,(m''_s-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad m''_s = -\,s$$

$$0 \xleftarrow{\hat{\mathbf{S}}_-} |\, s,-s> \xleftarrow{\hat{\mathbf{S}}_-} |\, s,-s+1> \;\cdots\; |\, s,s-2> \xleftarrow{\hat{\mathbf{S}}_-} |\, s,s-1> \xleftarrow{\hat{\mathbf{S}}_-} |\, s,+s> \xrightarrow{\hat{\mathbf{S}}_+} 0$$

On peut alors tracer le schéma ci-dessus qui montre que partant de $m'_s$ =+s on

atteint $m''_s = -s$ en appliquant une succession de $\hat{\mathbf{S}}_-$ qui ont chacun pour effet de faire décroître $m_s$ d'une unité.

Il s'ensuit que la différence entre 2 valeurs $m_s$ quelconques est un entier et que en particulier $m'_s - m''_s = 2s$ est aussi un entier.

Nous arrivons à la conclusion que s dont on ne savait rien jusqu'ici est entier ou demi entier.

*Les valeurs de s possibles sont entières et demi-entières*

Si s est entier le nombre de valeurs ( 2s+1) que peut prendre $m_s$ est impair. Si s est un demi entier, le nombre de valeurs que peut prendre $m_s$ est pair.

Puisque le nombre de taches est égal au nombre de valeurs que peut prendre $m_s$ , un nombre pair de taches devient possible.

III-4 le spin de l'électron

*Postulat 4*

Le nombre quantique s associé à l'électron s= 1/2.

$m_s$ peut prendre les valeurs $m_s = +1/2$ et $m_s = -1/2$

L'espace $\mathcal{F}^{sp}$ est un espace à deux dimensions.

La base $\left\{ |s=\frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle \ , \ |s=\frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle \right\}$ diagonalise simultanément $\hat{\mathbf{S}}^2$ et $\hat{\mathbf{S}}_z$.

$$\hat{\mathbf{S}}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{\mathbf{S}}_z = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans cette base, les matrices $\hat{\mathbf{S}}_x$ et $\hat{\mathbf{S}}_y$ ne sont bien sûr pas diagonales.

III-5 Facteur de Landé

Si nous venons de rendre compte du fait que le nombre de taches de l'expérience de Stern et Gerlach pouvait être pair, nous n'avons pas encore rendu compte de leur espacement qui s'est avéré être différent de $\Delta z_{th}$.

Nous avons vu en effet que l'espacement mesuré est $\Delta z = g\Delta z_{th}$ où g est un rationnel simple compris entre 1 et 2.( § I-4).

Tout se passe comme si le rapport entre le moment cinétique et le moment magnétique n'était pas $\frac{-|e|}{2\,m_e}$ mais en différait par le facteur g.

Pour comprendre les résultats expérimentaux, il faut admettre que:

Au moment cinétique orbital **L** est associé un moment magnétique orbital $\boldsymbol{M}$ lié à **L** par la relation:

$$\frac{\boldsymbol{M}}{\mathbf{L}} = \frac{-|e|}{2\,m_e}$$

Au spin **S** est associé un moment magnétique de spin $\boldsymbol{M}_s$ lié à **S** par la relation:

$$\frac{\boldsymbol{M}_s}{\mathbf{S}} = 2\ \frac{-|e|}{2\ m_e}$$

Le rapport gyromagnétique de spin est double du rapport gyromagnétique orbital. Le facteur 2 ( exactement 2.003) est appelé facteur de Landé du spin de l'électron.

III-6 Moment magnétique de l'atome

Un atome contient un grand nombre d'électrons apportant chacun leur moment cinétique orbital et leur spin.

Dans une couche pleine, les moments cinétiques orbitaux d'une part et les moments magnétiques de spin d'autre part se compensent deux à deux.

Dans le cas général, la résultante des moments orbitaux et des spins des électrons est appelée "spin" de l'atome et est notée **J**.

Le moment magnétique total de l'atome $\boldsymbol{M}$ est lié à **J** par la relation:

$$\boldsymbol{M} = g_J\ \frac{-|e|}{2\ m_e}\ \mathbf{J} = \gamma\ \mathbf{J}.$$

Où $g_J$ est compris entre 1 et 2, c'est à dire entre le facteur de Landé orbital (1) et la facteur de Landé du spin de l'électron (2).

L'atome d'argent présente un moment cinétique orbital nul et un spin 1/2. Son facteur de Landé est 2, ce que met en évidence l'expérience de Stern et Gerlach.