أكاديمية فـــــاس نيابة صفرو ثا . سيدي الحسن اليوسي	**فـــــرض مـــــحــروس رقم 1** (2008-2009)	**الثانيـــة علوم رياضية أ** مدة الإنجاز: ساعتان التاريخ : 30 أكتوبر 2008 الأستاذ : ح. بوعيون

التمرين 1

1) بين أن $2\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$ — 1

2) أحسب $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{-x}+x}{\sqrt{-x}+x}$. — 0, 75

3) أحسب $\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt[3]{1-x}+x^2-1}{x-1}$. — 0,75

4) أحسب $\lim_{x\to1^+}\frac{\arctan(\sqrt[3]{x}-1)}{x-1}$. — 0,75

5) a) بين أن $(\forall x<0)\ :\ arc\tan x+\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$ — 0,75

b) استنتج $\lim_{x\to+\infty}(2xArc\tan(1-\sqrt[3]{x})+\pi x)$ — 1

التمرين 2

1) بين أن $(\forall p\in\mathbb{N})\ :\arctan(p+1)-\arctan(p)=\arctan(\frac{1}{P^2+p+1})$ — 1

2) نعتبر المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $S_n=\sum_{p=0}^{n}\arctan(\frac{1}{P^2+p+1})$ — 1,5

أحسب S_n بدلالة n واستنتج $\lim S_n$.

التمرين 3

لكل عدد طبيعي $n\geq3$ نعتبر الدالة $f_n(x)=x^n-2-n(x-1)$

1) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_n في $[0,1]$. — 1

2) أدرس رتابة المتتالية (x_n) واستنتج أن (x_n) متقاربة . — 1

3) a) بين $(\forall n\geq3):x_n=\frac{n+x_n^n-2}{n}$. — 0,75

b) استنتج تأطيرا لـ x_n ثم أحسب $\lim x_n$. — 1

التمرين 4 لتكن f و g دالتين معرفتين من $[0,1]$ نحو $[0,1]$ ومتصلتين بحيث $f\circ g=g\circ f$ نريد في هذا التمرين أن نبين أنه $(\exists c\in[0,1]):f(c)=g(c)$. 1) بين أنه $(\exists s\in[0,1]):f(s)=s$. 2) بين أن $(\forall n\geq 0):g^n(s)=f(g^n(s))$. (يمكن استعمال الإستدلال بالترجع) (مع $g^n=\underbrace{g\circ g\circ g\circ\cdots\cdots g}_{n\ fois}$ لكل $n\geq 1$ و $g^0=Id:x\to x$.) 3) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_n=g^n(s)$ لكل $n\in\mathbb{N}$. a) تحقق أن $f(u_n)=u_n$ و $u_{n+1}=g(u_n)$. b) بين أن $(\forall n\in IN):\ 0\leq u_n\leq 1$ c) نفترض أن المتتالية (u_n) رتيبة . بين المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها l تحقق $f(l)=g(l)$. d) نفترض أن المتتالية (u_n) ليست رتيبة . بين أن : $(\exists(u,v)\in[0,1]^2):(f(u)-g(u))(f(v)-g(v))\leq 0$ 4) Conclure .	0,75 0,75 0,75 0,5 0,75 1 0,75
التمرين 5 ليكن $a\in]-1,1[$ نعتبر الدالة المعرفة على $[0,\pi[$ بما يلي : $g(x)=\arctan\left[\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}\tan(\dfrac{x}{2})\right]$ ولتكن f دالة متصلة على $[0,\pi]$ بحيث $(\forall x\in[0,\pi[):f(x)=\pi-2g(x)$. 1) أحسب $f(\pi)$. 2) بين أن $(\forall x\in]0,\pi[):\ 0<f(x)<\pi$ 3) a) بين أن $(\forall x\in]0,\pi[):\ \tan(\dfrac{f(x)}{2})\tan(\dfrac{x}{2})=\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}$ b) استنتج أن $(\forall x\in[0,\pi]):\ f(f(x))=x$ b) استنتج أن الدالة f تقابل من $[0,\pi]$ نحو $[0,\pi]$ واستنتج التقابل العكسي f^{-1} .	 0,5 0,5 1 1 0,5