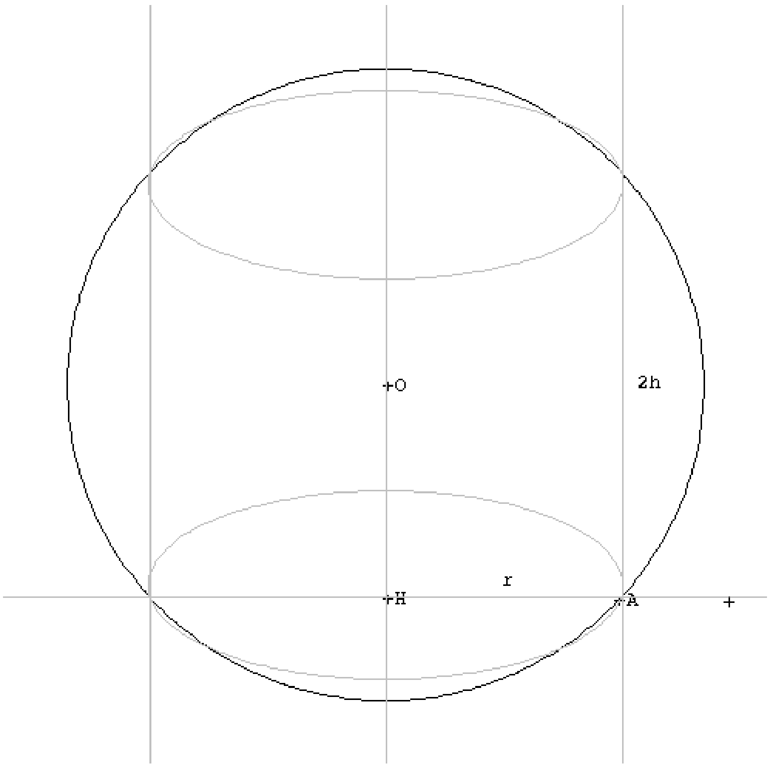
fonction polynôme, optimisation :

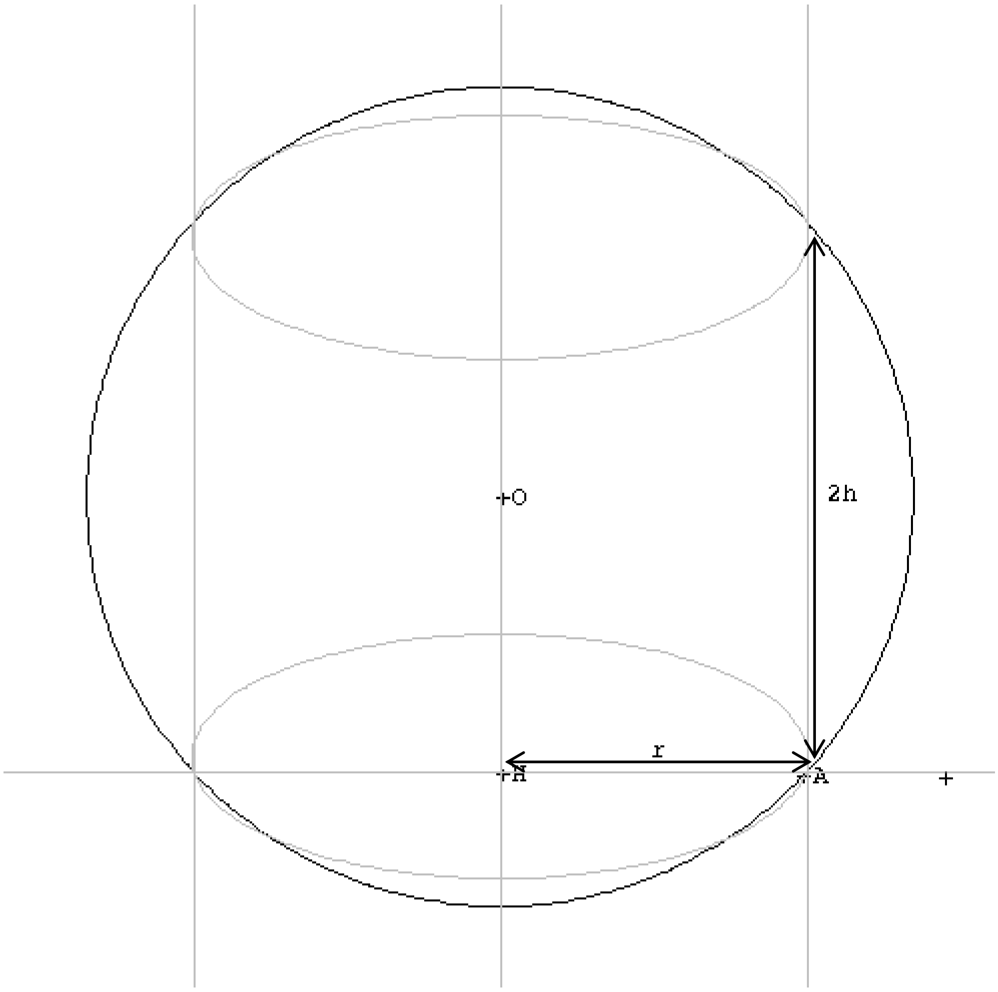
Dans une sphère de centre O et de rayon 6 dm, on inscrit un cylindre de révolution de hauteur 2h et de rayon r.
Le but du problème est de déterminer h pour que le volume du cylindre soit maximal.



1) À quel intervalle h appartient-il ? Justifier.
2) Calculer r en fonction de h.
3) Montrer que le volume du cylindre en fonction de h est $V(h) = 2\pi(36h - h^3)$. On rappelle que le volume d'un cylindre de révolution est $V = \pi r^2 \times$ hauteur.
4) Calculer $V'(h)$ et en déduire le tableau de variation de V.
5) En déduire la valeur de h pour laquelle ce volume est maximum. En donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,1 près.
6) Résoudre l'équation $V(h) = 0$. Interpréter dans le cadre du problème les solutions trouvées.

fonction polynôme, optimisation :

Dans une sphère de centre O et de rayon 6 dm, on inscrit un cylindre de révolution de hauteur 2h et de rayon r.
Le but du problème est de déterminer h pour que le volume du cylindre soit maximal.



1) h appartient à l'intervalle $[0;6]$ car le diamètre de la sphère est 12

2) OHA est un triangle rectangle en H. En utilisant le théorème de Pythagore on a :

$r^2 = 6^2 - h^2 \Leftrightarrow \boxed{r = \sqrt{36-h^2}}$

3) Le volume du cylindre est le produit de sa base par sa hauteur

Donc $V(h) = \pi \times r^2 \times 2h = \pi \times \left(36 - h^2\right) \times 2h = 2\pi\left(36h - h^3\right)$ pour tout $h \in [0;6]$

4) V est une fonction polynôme donc dérivable sur son ensemble de définition $[0;6]$

Pour tout $h \in [0;6]$

$V'(h) = 2\pi\left(36 - 3h^2\right) = 6\pi\left(12 - h^2\right) = 6\pi\left(\sqrt{12} - h\right)\left(\sqrt{12} + h\right)$

$6\pi\left(\sqrt{12} - h\right)\left(\sqrt{12} + h\right)$ est un polynôme du second degré donc du signe de $a = -6\pi$ à l'extérieur des racines évidentes $-\sqrt{12}$ et $\sqrt{12}$. D'où le tableau de variation de V :

h	0		$\sqrt{12}$		6
$V'(h)$		+	0	-	
$V(h)$	0	$\nearrow$	$48\pi\sqrt{12}$	$\searrow$	0

5) La valeur de h pour laquelle ce volume est maximum est $\sqrt{12}$. La valeur exacte du volume maximal est $V_{\max} = 48\pi\sqrt{12} = 522.4$ à 0,1 près.

6) Pour tout $h \in [0;6]$

$V(h) = 0 \Leftrightarrow 2\pi\left(36h - h^3\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\pi h\left(36 - h^2\right) = 0 \Leftrightarrow 2\pi h(6-h)(6+h) = 0$

$\Leftrightarrow h = 0$ ou $h = -6$ ou $h = 6$

Donc $S_{[0;6]} = \{0;6\}$

Lorsque h = 0 le cylindre est un disque de rayon 6 son volume es nul
Lorsque h = 6 le cylindre est un segment de longueur 6 son volume est nul.