Retour sur les courbes Bézier

Dans une chronique de mai 2017, j'avais parlé des courbes de Bézier ; je vais revenir sur le sujet en approfondissant un peu l'aspect mathématique des choses.
En effet le nom de ce blog n'est-il pas LaTeX et Mathématiques ?
Il y aura naturellement des graphiques pour le tracé desquels je vais avoir besoin du package Euclide ; j'avais consacré quatre chroniques à cette extension en mai 2016, et j'avais corrigé et regroupé ces chroniques en une seule en novembre 2016 : le fichier complet s'appelle Euclide_init.
Je vais également utiliser des méthodes pour définir des points décrites dans Encore des graphiques.

1 Barycentre

Les courbes de Bézier reposent sur la notion de barycentre de deux points.
Le point I est barycentre du système $\big\{\mathrm{A}\,(a)\,;\mathrm{B}\,(b)\big\}$ avec $a+b\neq 0$, signifie que pour tout point X, $a\,\overrightarrow{\mathrm{XA}}+b\,\overrightarrow{\mathrm{XB}}=(a+b)\,\overrightarrow{\mathrm{XI}}$.
Donc, en prenant X en A, on déduit que $b\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a+b)\,\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{b}{a+b}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.
Le point I est donc l'image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{b}{a+b}$.

Pour revenir aux courbes de Bézier, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;1]$, le point I est barycentre du système $\big\{\mathrm{A}\,(1-t)\,;\mathrm{B}\,(t)\big\}$ signifie que I est l'image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport t.
Et quand t décrit l'intervalle $[0\,;1]$, le point I décrit le segment $[\mathrm{AB}]$.

2 Courbe de Bézier à trois points de contrôle

2.1 La théorie

On part de trois points A, B et C qu'il vaut mieux ne pas prendre alignés !
On va décrire la courbe de Bézier $\mathscr{C}$ dont les trois points de contrôle sont A, B et C.
Pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;1]$:

- on trace I le barycentre du système $\big\{\mathrm{A}\,(1-t)\,;\mathrm{B}\,(t)\big\}$;
- on trace J le barycentre du système $\big\{\mathrm{B}\,(1-t)\,;\mathrm{C}\,(t)\big\}$;
- on trace M le barycentre du système $\big\{\mathrm{I}\,(1-t)\,;\mathrm{J}\,(t)\big\}$.

La courbe $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points M quand t décrit l'intervalle $[0\,;1]$.

2.2 Les calculs

2.2.1 Forme vectorielle

- Le point I est le barycentre du système $\big\{\mathrm{A}\,(1-t)\,;\mathrm{B}\,(t)\big\}$ donc pour tout point X, on a $(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{XA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{XB}}=\overrightarrow{\mathrm{XI}}$. En prenant X en O, on a $(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}$.
- Le point J est le barycentre du système $\big\{\mathrm{B}\,(1-t)\,;\mathrm{C}\,(t)\big\}$, donc $(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$.
- Le point M est le barycentre du système $\big\{\mathrm{I}\,(1-t)\,;\mathrm{J}\,(t)\big\}$, donc $(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OI}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OJ}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

De ces trois égalités vectorielles on déduit :
$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(1-t)\Big((1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\Big)+t\Big((1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\Big)$.
Ce qui donne après développement : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(1-t)^2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2t(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t^2\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$.

La courbe de Bézier de points de contrôles A, B et C, est l'ensemble des points M vérifiant l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{\text{OM}} = (1-t)^2\,\overrightarrow{\text{OA}} + 2t(1-t)\,\overrightarrow{\text{OB}} + t^2\,\overrightarrow{\text{OC}}$$

dans laquelle t décrit l'intervalle $[0\,;1]$.

2.2.2 Forme paramétrique

En décomposant selon les vecteurs de base, on a :

$$\overrightarrow{\text{OM}} = (1-t)^2\,\overrightarrow{\text{OA}} + 2t(1-t)\,\overrightarrow{\text{OB}} + t^2\,\overrightarrow{\text{OC}} \iff \begin{cases} x = (1-t)^2 x_{\text{A}} + 2t(1-t)x_{\text{B}} + t^2 x_{\text{C}} \\ y = (1-t)^2 y_{\text{A}} + 2t(1-t)y_{\text{B}} + t^2 y_{\text{C}} \end{cases}$$

La courbe de Bézier de points de contrôles A $(x_{\text{A}}\,;y_{\text{A}})$, B $(x_{\text{B}}\,;y_{\text{B}})$ et C $(x_{\text{C}}\,;y_{\text{C}})$, est l'ensemble des points M $(x(t)\,;y(t))$ vérifiant le système

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)^2 x_{\text{A}} + 2t(1-t)x_{\text{B}} + t^2 x_{\text{C}} \\ y(t) = (1-t)^2 y_{\text{A}} + 2t(1-t)y_{\text{B}} + t^2 y_{\text{C}} \end{cases}$$

dans lequel t décrit l'intervalle $[0\,;1]$.

2.2.3 Tangentes

Cas général

On sait que, dans le cas général, la tangente à la courbe paramétrée représentant le point M $(x(t)\,;y(t))$ en $t = t_0$ a pour équation $\dfrac{y - y(t_0)}{x - x(t_0)} = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$ autrement dit $\big(y - y(t_0)\big)\,x'(t_0) = \big((x - x(t_0)\big)\,y'(t_0)$.

$x(t) = (1-t)^2 x_{\text{A}} + 2t(1-t)x_{\text{B}} + t^2 x_{\text{C}}$ donc $x'(t) = (-2+2t)x_{\text{A}} + (2-4t)x_{\text{B}} + 2tx_{\text{C}}$ c'est-à-dire $x'(t) = (2x_{\text{A}} - 4x_{\text{B}} + 2x_{\text{C}})\,t - 2x_{\text{A}} + 2x_{\text{B}}$.
De même $y'(t) = (2y_{\text{A}} - 4y_{\text{B}} + 2y_{\text{C}})\,t - 2y_{\text{A}} + 2y_{\text{B}}$.

Ce qui donne pour équation de la tangente au point de la courbe correspondant à $t = t_0$
$(y - y(t_0))\,((2x_{\text{A}} - 4x_{\text{B}} + 2x_{\text{C}})\,t_0 - 2x_{\text{A}} + 2x_{\text{B}}) = (x - x(t_0))\,((2y_{\text{A}} - 4y_{\text{B}} + 2y_{\text{C}})\,t_0 - 2y_{\text{A}} + 2y_{\text{B}})$.

Tangente en A

Le point A correspond à la valeur 0 du paramètre t ; autrement dit $t_0 = 0$.
$x(t_0) = x(0) = x_{\text{A}}$ et $y(t_0) = y(0) = y_{\text{A}}$
L'équation de la tangente à la courbe en A est alors
$(y - y_{\text{A}})\,(-2x_{\text{A}} + 2x_{\text{B}}) = (x - x_{\text{A}})\,(-2y_{\text{A}} + 2y_{\text{B}})$.
Une petite vérification élémentaire permet de voir que cette tangente en A passe par le point B car : $(y_{\text{B}} - y_{\text{A}})\,(-2x_{\text{A}} + 2x_{\text{B}}) = (x_{\text{B}} - x_{\text{A}})\,(-2y_{\text{A}} + 2y_{\text{B}})$.

Tangente en C

Le point C correspond à la valeur 1 du paramètre t ; autrement dit $t_0 = 1$.
$x(t_0) = x(1) = x_{\text{C}}$ et $y(t_0) = y(1) = y_{\text{C}}$
L'équation de la tangente à la courbe en C est alors
$(y - y_{\text{C}})\,\big((2x_{\text{A}} - 4x_{\text{B}} + 2x_{\text{C}}) \times 1 - 2x_{\text{A}} + 2x_{\text{B}}\big) = (x - x_{\text{C}})\,\big((2y_{\text{A}} - 4y_{\text{B}} + 2y_{\text{C}}) \times 1 - 2y_{\text{A}} + 2y_{\text{B}}\big)$
ce qui équivaut à
$(y - y_{\text{C}})\,(2x_{\text{A}} - 4x_{\text{B}} + 2x_{\text{C}} - 2x_{\text{A}} + 2x_{\text{B}}) = (x - x_{\text{C}})\,(2y_{\text{A}} - 4y_{\text{B}} + 2y_{\text{C}} - 2y_{\text{A}} + 2y_{\text{B}})$
ou encore $(y - y_{\text{C}})\,(-2x_{\text{B}} + 2x_{\text{C}}) = (x - x_{\text{C}})\,(-2y_{\text{B}} + 2y_{\text{C}})$.
Une petite vérification élémentaire permet de voir que cette tangente en C passe par le point B car : $(y_{\text{B}} - y_{\text{C}})\,(-2x_{\text{B}} + 2x_{\text{C}}) = (x_{\text{B}} - x_{\text{C}})\,(-2y_{\text{B}} + 2y_{\text{C}})$.

La courbe de Bézier de points de contrôles A, B et C, a pour tangente en A la droite (AB) et pour tangente en C la droite (CB)..

2.3 Exemple

On prend A de coordonnées (2 ; 1), B de coordonnées (1 ; 2) et C de coordonnées (4 ; 3) et on appelle $\mathscr{C}$ la courbe de Bézier ayant A, B et C comme points de contrôle.
D'après ce qui a été vu précédemment, la représentation paramétrique de cette courbe est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & (1-2t+t^2)\times 2+(2t-2t^2)\times 1+t^2\times 4 \\ y(t) & = & (1-2t+t^2)\times 1+(2t-2t^2)\times 2+t^2\times 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 2-4t+2t^2+2t-2t^2+4t^2 \\ y(t) & = & 1-2t+t^2+4t-4t^2+3t^2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 4t^2-2t+2 \\ y(t) & = & 2t+1 \end{array}\right.$$

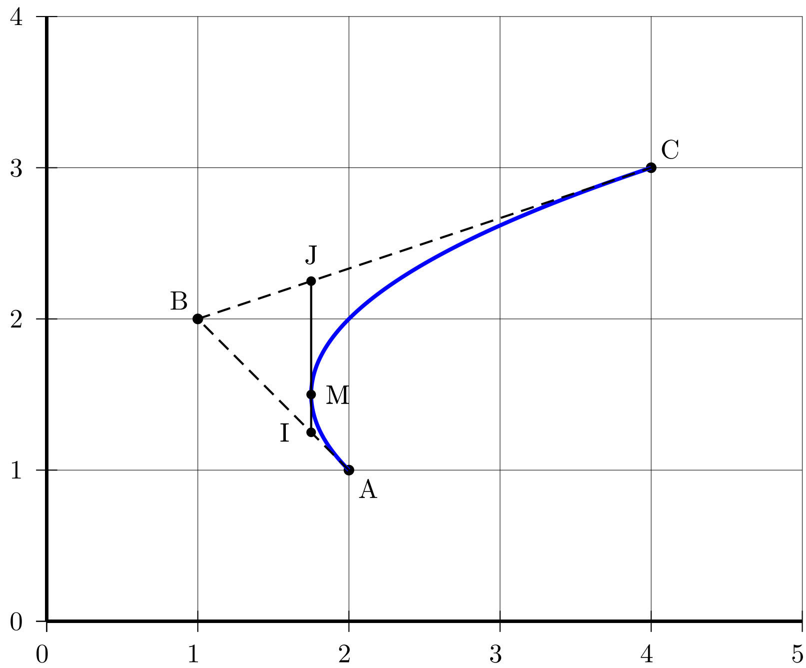
2.4 Graphiques

Pour tracer de façon efficace cette courbe de Bézier, on va définir les points avec l'instruction `\Cnode` ; on pourra ainsi tracer la courbe en utilisant les lettres A, B et C, au lieu des coordonnées. Par la suite, il suffira de modifier les coordonnées des points sur la seule ligne où elles sont définies pour tracer une nouvelle courbe.

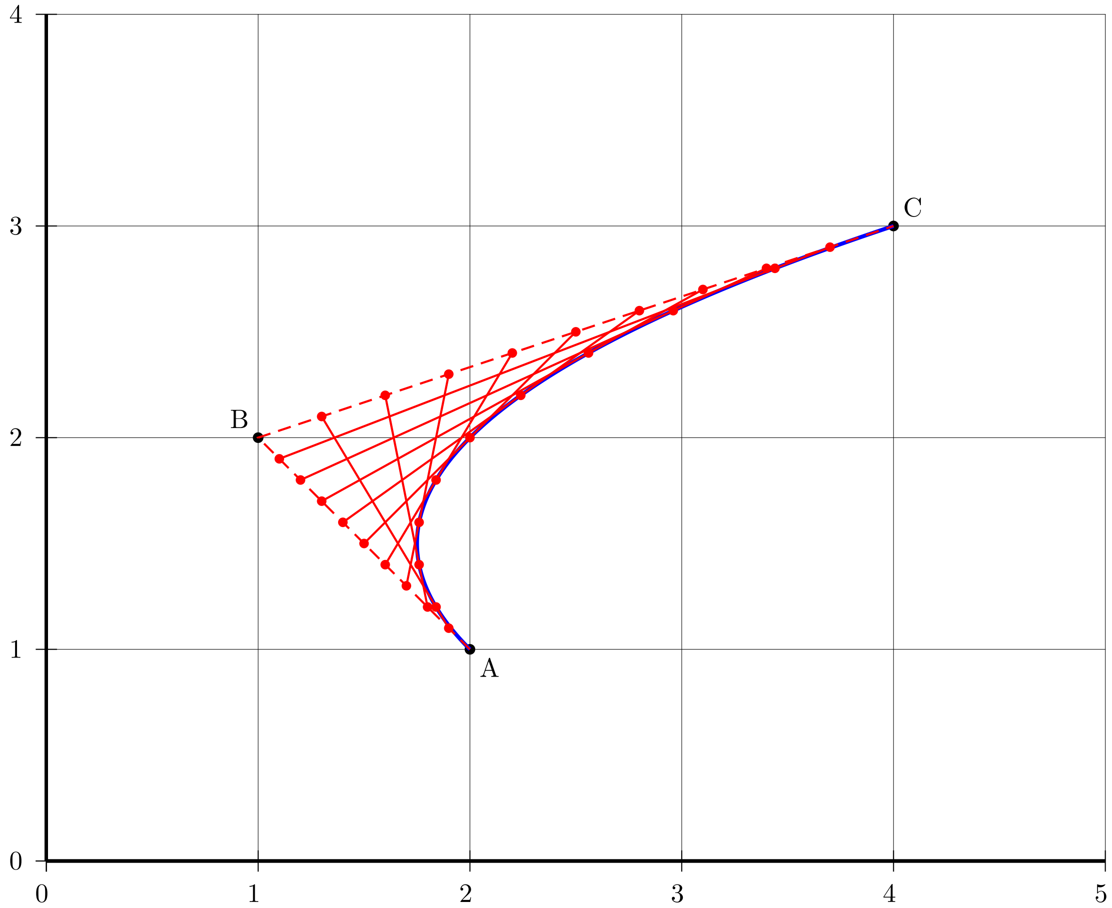
```
\Cnode*(2,1){A} \Cnode*(1,2){B} \Cnode*(4,3){C}
```

Pour voir un peu ce qui se passe, on a tracé les barycentres I, J et M, pour une valeur de t définie dans le texte du graphique. On peut modifier la valeur de t pour obtenir d'autres positions des points I, J et M.
C'est la fonction `\pstHomO` du package `Euclide` qui a été utilisée pour tracer les barycentres.

```
\def\t{0.25}%    valeur du paramètre t
\pstHomO[HomCoef=\t,PosAngle={180}]{A}{B}[I]
\pstHomO[HomCoef=\t,PosAngle={90}]{B}{C}[J]
\pstHomO[HomCoef=\t,PosAngle={0}]{I}{J}[M]
```



Au moyen d'un `multido`, on peut tracer plusieurs triplets de points (I ; J ; M).
Pour que la figure reste compréhensible, j'ai retiré l'affichage des noms des points et agrandi un peu le dessin.



3 Courbe de Bézier à quatre points de contrôle

3.1 La théorie

On part de quatre points A, B, C et D, tels que trois d'entre eux ne sont pas alignés.
On va décrire la courbe de Bézier $\mathscr{C}$ dont les quatre points de contrôle sont A, B, C et D.
Pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;1]$:

- on trace I le barycentre du système $\left\{\mathrm{A}\,(1-t)\,;\mathrm{B}\,(t)\right\}$;
- on trace J le barycentre du système $\left\{\mathrm{B}\,(1-t)\,;\mathrm{C}\,(t)\right\}$;
- on trace K le barycentre du système $\left\{\mathrm{C}\,(1-t)\,;\mathrm{D}\,(t)\right\}$;
- on trace P le barycentre du système $\left\{\mathrm{I}\,(1-t)\,;\mathrm{J}\,(t)\right\}$;
- on trace R le barycentre du système $\left\{\mathrm{J}\,(1-t)\,;\mathrm{K}\,(t)\right\}$;
- on trace M le barycentre du système $\left\{\mathrm{P}\,(1-t)\,;\mathrm{R}\,(t)\right\}$.

La courbe $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points M quand t décrit l'intervalle $[0\,;1]$.

3.2 Les calculs

3.2.1 Forme vectorielle

- Le point I est le barycentre du système $\left\{\mathrm{A}\,(1-t)\,;\mathrm{B}\,(t)\right\}$ donc on a $(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}$.
- Le point J est le barycentre du système $\left\{\mathrm{B}\,(1-t)\,;\mathrm{C}\,(t)\right\}$, donc $(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$.

- Le point K est le barycentre du système $\{C\,(1-t)\,;D\,(t)\}$, donc $(1-t)\,\overrightarrow{OC}+t\,\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OK}$.
- Le point P est le barycentre du système $\{I\,(1-t)\,;J\,(t)\}$, donc $(1-t)\,\overrightarrow{OI}+t\,\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OP}$.
- Le point R est le barycentre du système $\{J\,(1-t)\,;K\,(t)\}$, donc $(1-t)\,\overrightarrow{OJ}+t\,\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OR}$.
- Le point M est le barycentre du système $\{P\,(1-t)\,;R\,(t)\}$, donc $(1-t)\,\overrightarrow{OP}+t\,\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OM}$.

De ces égalités vectorielles on déduit :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= (1-t)\left((1-t)\,\overrightarrow{OI}+t\,\overrightarrow{OJ}\right)+t\left((1-t)\,\overrightarrow{OJ}+t\,\overrightarrow{K}\right)\\ &= (1-t)^2\,\overrightarrow{OI}+2t(1-t)\,\overrightarrow{OJ}+t^2\,\overrightarrow{OK}\\ &= (1-t)^2\left((1-t)\,\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}\right)+2t(1-t)\left((1-t)\,\overrightarrow{OB}+t\,\overrightarrow{OC}\right)+t^2\left((1-t)\,\overrightarrow{OC}+t\,\overrightarrow{OD}\right)\\ &= (1-t)^3\,\overrightarrow{OA}+t(1-t)^2\,\overrightarrow{OB}+2t(1-t)^2\,\overrightarrow{OB}+2t^2(1-t)\,\overrightarrow{OC}+t^2(1-t)\,\overrightarrow{OC}+t^3\,\overrightarrow{OD}\\ &= (1-t)^3\,\overrightarrow{OA}+3t(1-t)^2\,\overrightarrow{OB}+3t^2(1-t)\,\overrightarrow{OC}+t^3\,\overrightarrow{OD}\end{aligned}$$

La courbe de Bézier de points de contrôles A, B, C et D, est l'ensemble des points M vérifiant l'égalité vectorielle

$$(1-t)^3\,\overrightarrow{OA}+3t(1-t)^2\,\overrightarrow{OB}+3t^2(1-t)\,\overrightarrow{OC}+t^3\,\overrightarrow{OD}$$

dans laquelle t décrit l'intervalle $[0\,;1]$.

3.2.2 Forme paramétrique

En décomposant selon les vecteurs de base, on a :

$$\overrightarrow{OM} = (1-t)^2\,\overrightarrow{OA}+2t(1-t)\,\overrightarrow{OB}+t^2\,\overrightarrow{OC}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& (1-t)^3x_A+3t(1-t)^2x_B+3t^2(1-t)x_C+t^3x_D\\ y &=& (1-t)^3y_A+3t(1-t)^2y_B+3t^2(1-t)y_C+t^3y_D\end{array}\right.$$

La courbe de Bézier de points de contrôles $A\,(x_A\,;y_A)$, $B\,(x_B\,;y_B)$, $C\,(x_C\,;y_C)$ et $D\,(x_D\,;y_D)$, est l'ensemble des points $M\,(x(t)\,;y(t))$ vérifiant le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) &=& (1-t)^3x_A+3t(1-t)^2x_B+3t^2(1-t)x_C+t^3x_D\\ y(t) &=& (1-t)^3y_A+3t(1-t)^2y_B+3t^2(1-t)y_C+t^3y_D\end{array}\right.$$

dans lequel t décrit l'intervalle $[0\,;1]$.

3.2.3 Tangentes

Cas général

On a vu que, dans le cas général, la tangente à la courbe paramétrée représentant le point $M\,(x(t)\,;y(t))$ en $t=t_0$ a pour équation $\big(y-y(t_0)\big)\,x'(t_0) = \big((x-x(t_0)\big)\,y'(t_0)$.

$x(t) = (1-t)^3x_A+3t(1-t)^2x_B+3t^2(1-t)x_C+t^3x_D$ c'est-à-dire
$x(t) = (1-3t+3t^2-t^3)x_A+(3t-6t^2+3t^3)x_B+(3t^2-3t^3)x_C+t^3x_D$ donc
$x'(t) = (-3+6t-3t^2)x_A+(3-12t+0t^2)x_B+(6t-9t^2)x_C+3t^2x_D$ ou encore
$x'(t) = (-3x_A+9x_B-9x_C+3x_D)\,t^2+(6x_A-12x_B+6x_C)\,t+(-3x_A+3x_B)$.
De même $y'(t) = (-3y_A+9y_B-9y_C+3y_D)\,t^2+(6y_A-12y_B+6y_C)\,t+(-3y_A+3y_B)$.

Ce qui donne pour équation de la tangente au point de la courbe correspondant à $t=t_0$

$$\begin{aligned}&(y-y(t_0))\left((-3x_A+9x_B-9x_C+3x_D)\,t_0^2+(6x_A-12x_B+6x_C)\,t_0+(-3x_A+3x_B)\right)\\ &\qquad= (x-x(t_0))\left((-3y_A+9y_B-9y_C+3y_D)\,t_0^2+(6y_A-12y_B+6y_C)\,t_0+(-3y_A+3y_B)\right).\end{aligned}$$

Tangente en A

Le point A correspond à la valeur 0 du paramètre t ; autrement dit $t_0=0$.
$x(t_0)=x(0)=x_A$ et $y(t_0)=y(0)=y_A$

L'équation de la tangente à la courbe en A est alors
$(y - y_{\mathrm{A}})(-3x_{\mathrm{A}} + 3x_{\mathrm{B}}) = (x - x_{\mathrm{A}})(-3y_{\mathrm{A}} + 3y_{\mathrm{B}})$.
Une petite vérification élémentaire permet de voir que cette tangente en A passe par le point B car : $(y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})(-3x_{\mathrm{A}} + 3x_{\mathrm{B}}) = (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})(-3y_{\mathrm{A}} + 3y_{\mathrm{B}})$.

Tangente en D
Le point D correspond à la valeur 1 du paramètre t ; autrement dit $t_0 = 1$.
$x(t_0) = x(1) = x_{\mathrm{D}}$ et $y(t_0) = y(1) = y_{\mathrm{D}}$
L'équation de la tangente à la courbe en D est alors

$$\begin{aligned}(y - y_{\mathrm{D}})&((-3x_{\mathrm{A}} + 9x_{\mathrm{B}} - 9x_{\mathrm{C}} + 3x_{\mathrm{D}}) + (6x_{\mathrm{A}} - 12x_{\mathrm{B}} + 6x_{\mathrm{C}}) + (-3x_{\mathrm{A}} + 3x_{\mathrm{B}}))\\ &= (x - x_{\mathrm{D}})((-3y_{\mathrm{A}} + 9y_{\mathrm{B}} - 9y_{\mathrm{C}} + 3y_{\mathrm{D}}) + (6y_{\mathrm{A}} - 12y_{\mathrm{B}} + 6y_{\mathrm{C}}) + (-3y_{\mathrm{A}} + 3y_{\mathrm{B}}))\end{aligned}$$

ce qui équivaut à
$(y - y_{\mathrm{D}})(-3x_{\mathrm{C}} + 3x_{\mathrm{D}}) = (x - x_{\mathrm{D}})(-3y_{\mathrm{C}} + 3y_{\mathrm{D}})$.
Une petite vérification élémentaire permet de voir que cette tangente en D passe par le point C car : $(y_{\mathrm{C}} - y_{\mathrm{D}})(-3x_{\mathrm{C}} + 3x_{\mathrm{D}}) = (x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{D}})(-3y_{\mathrm{C}} + 3y_{\mathrm{D}})$.

La courbe de Bézier de points de contrôles A, B, C et D a pour tangente en A la droite (AB) et pour tangente en D la droite (DC)..

3.3 Exemple

On prend A de coordonnées (3 ; 1), B de coordonnées (1 ; 1), C de coordonnées (2 ; 4) et D de coordonnées (5 ; 2), et on appelle $\mathscr{C}$ la courbe de Bézier ayant A, B, C et D comme points de contrôle.
D'après ce qui a été vu précédemment, la représentation paramétrique de cette courbe est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) &=& (1-t)^3 \times 3 + 3t(1-t)^2 \times 1 + 3t^2(1-t) \times 2 + t^3 \times 5 \\ y(t) &=& (1-t)^3 \times 1 + 3t(1-t)^2 \times 1 + 3t^2(1-t) \times 4 + t^3 \times 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x(t) &=& (1-3t+3t^2-t^3) \times 3 + (3t-6t^2+3t^3) \times 1 + (3t^2-3t^3) \times 2 + t^3 \times 5 \\ y(t) &=& (1-3t+3t^2-t^3) \times 1 + (3t-6t^2+3t^3) \times 1 + (3t^2-3t^3) \times 4 + t^3 \times 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x(t) &=& 3-9t+9t^2-3t^3+3t-6t^2+3t^3+6t^2-6t^3+5t^3 \\ y(t) &=& 1-3t+3t^2-t^3+3t-6t^2+3t^3+12t^2-12t^3+2t^3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x(t) &=& -t^3+9t^2-6t+3 \\ y(t) &=& -8t^3+9t^2+1 \end{array}\right.$$

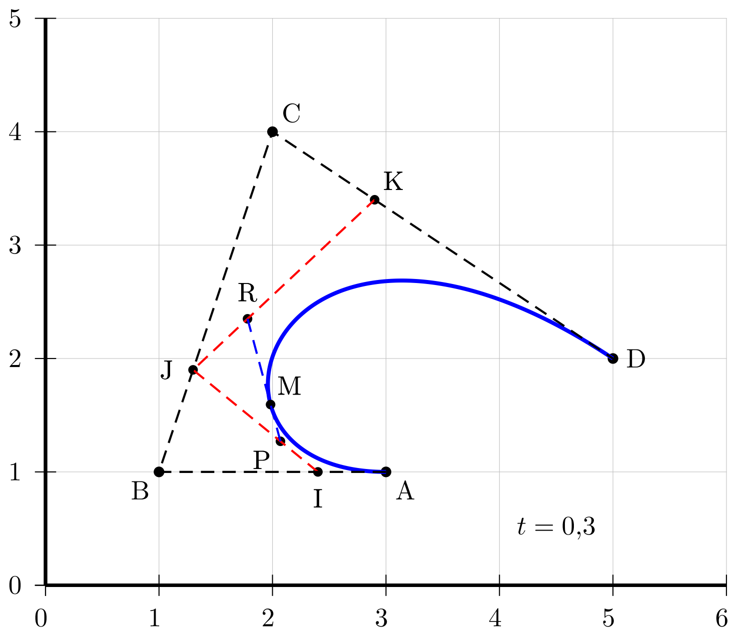
3.4 Graphiques

Comme précédemment, on définit les points avec l'instruction `\Cnode` :

```
\Cnode*(3,1){A} \Cnode*(1,1){B} \Cnode*(2,4){C} \Cnode*(5,2){D}
```

On a également tracé les barycentres I, J et K, puis P et R, puis M, pour une valeur de t définie dans le texte du graphique. On peut modifier la valeur de t pour obtenir d'autres positions des points.
Ces points sont, là aussi, tracés au moyen de l'instruction `\pstHomO` :

```
\def\t{0.3}
\pstHomO[HomCoef=\t,PosAngle=-90]{A}{B}[I]
\pstHomO[HomCoef=\t,PosAngle=180]{B}{C}[J]
\pstHomO[HomCoef=\t,PosAngle=45]{C}{D}[K]
\pstHomO[HomCoef=\t,PosAngle=-135]{I}{J}[P]
\pstHomO[HomCoef=\t,PosAngle=90]{J}{K}[R]
\pstHomO[HomCoef=\t,PosAngle=45]{P}{R}[M]
```



4 Exercice

Pour vous amuser, vous pouvez réaliser ce dessin en forme de « pique ».
Les deux courbes en rouge sont des courbes de Bézier à 4 points de contrôle, les quatre en bleu sont des courbes de Bézier à 3 points de contrôle.
Petite aide : tous les points de contrôle ont des coordonnées entières.