Corrigé

3. Soit $E_3 = \{ n \in \mathbb{Z}, (2n+1) \mid (n-3)\}$

Soit $n \in E_3$ alors $(2n+1)$ divise $(n-3)$, comme $(2n+1)$ divise lui-même aussi, on en déduit que $(2n+1)$ divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de $(2n+1)$ et $(n-3)$ c'est-à-dire les entiers de la forme $a(2n+1) + b\,(n-3)$ avec a et b entiers. En particulier $(2n+1)$ divise $1(2n+1) - 2(n-3)$ c'est-à-dire 7

Bilan : Si $n \in E_3$ alors $2n+1 \in \mathrm{D}(7)$ c'est-à-dire $n \in \{-4 ; -1 ; 0 ; 3\}$

On vient de prouver l'inclusion $E_3 \subset \{-4 ; -1 ; 0 ; 3\}$

Réciproquement :

Si $n = -4$ alors $2n+1 = -7$ et $n-3 = -7$ et comme -7 divise bien lui-même, on en conclut que $-4 \in E_3$.

Si $n = -1$ alors $2n+1 = -1$ et $n-3 = -4$ et comme -1 divise -4, on en conclut que $-1 \in E_3$.

Si $n = 0$ alors $2n+1 = 1$ et $n-3 = -3$ et comme 1 divise -3, on en conclut que $0 \in E_3$.

Si $n = 3$ alors $2n+1 = 7$ et $n-3 = 0$ et comme 7 divise 0, on en conclut que $3 \in E_3$.

Conclusion : $E_3 = \{-4 ; -1 ; 0 ; 3\}$

4. Déterminer les entiers relatifs tels que $\dfrac{2n-29}{n+2}$ soit un entier.

$E_4 = \{n \in \mathbb{Z}, \dfrac{2n-29}{n+2} \in \mathbb{Z}\}$

Remarque : Pour $n = -2$, $2n - 29 = -33$ donc $-2 \notin E_4$.

Si $\dfrac{2n-29}{n+2}$ est un entier alors il existe α entier tel que $\dfrac{2n-29}{n+2} = \alpha$ et donc $(2n-29) = \alpha\,(n+2)$ d'où $(n+2)$ divise $2n-29$.

Réciproquement, si $(n+2)$ divise $2n-29$, alors $(2n-29) = \alpha\,(n+2)$ et donc $\dfrac{2n-29}{n+2}$ est un entier puisque $\dfrac{2n-29}{n+2} = \alpha$

<u>Conclusion</u> : on vient de prouver que $\dfrac{2n-29}{n+2}$ est un entier si et seulement si $(n+2)$ divise $(2n-29)$

$n \in E_4 \Leftrightarrow \dfrac{2n-29}{n+2}$ est un entier $\Leftrightarrow (n+2)$ divise $(2n-29)$

Soit $n \in E_4$

Comme $(n+2)$ divise lui-même et qu'il divise $(2n-29)$, on en déduit que $(n+2)$ divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de $(n+2)$ et $(2n-29)$ c'est-à-dire les entiers de la forme $a(n+2) + b\,(2n-29)$ avec a et b entiers.

En particulier $(n+2)$ divise $1(2n-29) - 2(n+2)$ c'est-à-dire -33 et donc 33.

On vient de prouver que si $n \in E_4$ alors $(n+2) \in \mathrm{D}(33)$ où $\mathrm{D}(33) = \{-33 ; -11 ; -3 ; -1 ; 1 ; 3 ; 11 ; 33\}$ et donc $n \in \{-35 ; -13 ; -5 ; -3 ; -1 ; 1 ; 9 ; 31\}$

Réciproquement, si :

- $n = -35$ alors $n+2 = -33$ et $2n-29 = -99$. Comme -33 divise bien -99 alors $-35 \in E_4$.
- $n = -13$ alors $n+2 = -11$ et $2n-29 = -55$. Comme -11 divise bien -55 alors $-13 \in E_4$.
- $n = -5$ alors $n+2 = -3$ et $2n-29 = -39$. Comme -3 divise bien -39 alors $-5 \in E_4$.

• $n = -3$ alors $n + 2 = -1$ et $2n - 29 = -35$. Comme -1 divise bien -35 alors $-3 \in E_4$.
• $n = -1$ alors $n + 2 = 1$ et $2n - 29 = -31$. Comme -1 divise bien -31 alors $-1 \in E_4$.
• $n = 1$ alors $n + 2 = 3$ et $2n - 29 = -27$. Comme 3 divise bien -27 alors $1 \in E_4$.
• $n = 9$ alors $n + 2 = 11$ et $2n - 29 = -11$. Comme 11 divise bien -11 alors $9 \in E_4$.
• $n = 31$ alors $n + 2 = 33$ et $2n - 29 = 33$. Comme 33 divise bien 33 alors $31 \in E_4$.

Conclusion : On vient de prouver que

$$\{-35 ; -13 ; -5 ; -3 ; -1 ; 1 ; 9 ; 31\} \subset E_4$$

On en conclut que $E_4 = \{-35 ; -13 ; -5 ; -3 ; -1 ; 1 ; 9 ; 31\}$

5. Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a ; b)$ tels que $a^2 - b^2 = 9$

Notons E_5 l'ensemble des couples d'entiers naturels $(a ; b)$ tels que $a^2 - b^2 = 9$
$a^2 - b^2 = 9 \Leftrightarrow (a - b)(a+b) = 9$ (1)

D'après l'égalité (1), si le couple (a,b) est dans E_5 alors $(a - b)$ et $(a+b)$ sont des diviseurs de 9
Comme D(9) = $\{-9 ; -3 ; -1 ; 1 ; 3 ; 9\}$
On a plusieurs cas possibles :

1^er^ cas : $a - b = -9$	**2^ème^ cas : $a - b = -3$**	**3^ème^ cas : $a - b = -1$**
Dans ce cas, nécessairement, $a + b = -1$ **auquel cas, on trouve : $a = -5$ et $b = 4$**	Dans ce cas, nécessairement, $a + b = -3$ **auquel cas, on trouve : $a = -3$ et $b = 0$**	Dans ce cas, nécessairement, $a + b = -9$ **auquel cas, on trouve : $a = -5$ et $b = -4$**
4^ème^ cas : $a - b = 1$	**5^ème^ cas : $a - b = 3$**	**6^ème^ cas : $a - b = 9$**
Dans ce cas, nécessairement, $a + b = 9$ **auquel cas, on trouve : $a = 5$ et $b = 4$**	Dans ce cas, nécessairement, $a + b = 3$ **auquel cas, on trouve : $a = 3$ et $b = 0$**	Dans ce cas, nécessairement, $a + b = 1$ **auquel cas, on trouve : $a = 5$ et $b = -4$**

Bilan : Si $(a ; b) \in E_5$ alors $(a ; b) \in G$ où $G = \{(-5 ; 4), (-3 ; 0), (-5 ; -4), (5 ; 4), (3 ; 0), (5 ; -4)\}$
On vient de prouver l'inclusion suivante : $E_5 \subset G$

Réciproquement, on peut déjà observer que les couples suivants $(-5 ; 4)$, $(-3 ; 0)$, $(-5 ; -4)$ et $(-5 ; 4)$ n'appartiennent pas à E_5 puisque l'on se limite aux couples d'entiers naturels. Il ne reste plus qu'à regarder pour les couples suivants : $(5 ; 4)$ et $(3 ; 0)$

Si $(a ; b) = (5 ; 4)$ alors $a^2 - b^2 = 5^2 - 4^2 = 9$ donc $(5 ; 4)$ est dans E_5.
Si $(a ; b) = (3 ; 0)$ alors $a^2 - b^2 = 3^2 - 0^2 = 9$ donc $(3 ; 0)$ est dans E_5.
Finalement : $E_5 = \{(5 ; 4), (3 ; 0)\}$

Remarque : on aurait pu remarquer que comme l'on cherche des couples $(a ; b)$ d'entiers naturels, alors vérifiant (1), alors $a - b$ et $a+b$ sont de même signe puisque leur produit est positif (égal à 9).
Comme $a+b$ est positif, il en est de même de $a - b$ donc nécessairement $a - b > 0$ (il ne peut être nul) sans quoi le produit $(a - b)(a + b)$ serait nul (et donc différent de 9).

De plus $a - b \leq a+b$ (en effet $(a+b) - (a - b) = 2b \geq 0$ ☞ b est un entier naturel)

Ces observations étant faites, on pouvait donc éliminer d'office les cas n°1 , n°2 , n°3 et n°6.

On peut rajouter la question suivante : Déterminer tous les couples d'entiers relatifs $(a\ ;\ b)$ tels que $a^2 - b^2 = 9$

Dans ce cas, vous pouvez procéder comme précédemment en gardant tous les cas.
Vous aurez prouvé l'inclusion : $E_5 \subset G$.
Ensuite, vous chercherez à prouver l'inclusion $G \subset E_5$ en vérifiant que les 4 autres couples conviennent.
Du coup, vous aurez établi que $E_5 = G$.

Autre façon :
On peut remarquer que si le couple $(a\ ;b)$ est dans E_5, il en est de même des couples $(a\ ;-b)$, $(-a\ ;b)$ et $(-a\ ;-b)$ et réciproquement.

Que veut dire " $(a\ ;-b)$ est dans E_5 par exemple " ?
Cela signifie que l'on a : $(a)^2 + (-b)^2 = 9$

$(a\ ;\ b)$ est dans $E_5 \Leftrightarrow (a)^2 - (b)^2 = 9 \Leftrightarrow (a)^2 - (-b)^2 = 9 \Leftrightarrow (a\ ;-b)$ est dans E_5

Ces observations étant faites, au lieu de chercher tous les couples d'entiers relatifs $(a\ ;\ b)$ vérifiant $a^2 - b^2 = 9$, on peut se ramener à la recherche de couples d'entiers naturels $(a\ ;\ b)$ vérifiant $a^2 - b^2 = 1$. Ensuite aux couples $(a\ ;\ b)$, on peut rajouter les couples $(a\ ;-b)$, $(-a\ ;\ b)$ et $(-a\ ;-b)$.

Et rappelez-vous, dans la question précédente, on a trouvé les couples (5 ;4) et (3 ;0)
Au couple (5 ;4), on peut donc rajouter les couples (5 ; – 4), (– 5 ;4) et (– 5 ; – 4).
Au couples (3 ;0), on peut rajouter le couple (– 3 ;0) .