## Exercice 1

On considère le polynôme P défini par $P(x) = x^3 - 8x - 3$.

**1-** Calculer P(3), puis déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que $P(x) = (x - 3)(ax^2 + bx + c)$.
**2-** Résoudre l'équation $P(x) = 0$.
**3-** Etudier le signe de $P(x)$ et en déduire les solutions de l'inéquation $P(x) \geqslant 0$.

# correction

**1-**

$P(3) = 3^3 - 8 \times 3 - 3 = 27 - 24 - 3 = 0$.

$(x - 3)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 3ax^2 - 3bx - 3c = ax^3 + (b - 3a)x^2 + (c - 3b)x - 3c$.

Pour que ceci soit égal à $P(x)$, il suffit que $\begin{cases} a=1 \\ b-3a=0 \\ c-3b=-8 \\ -3c=-3 \end{cases}$, soit $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=1 \end{cases}$.

Ainsi $P(x) = (x - 3)(x^2 + 3x + 1)$.

**2-**

$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 3x + 1) = 0$. Ainsi :

- soit $x - 3 = 0$ et alors $x = 3$
- soit $x^2 + 3x + 1 = 0$; le discriminant de cette équation du second degré est

$\Delta = 3^2 - 4 = 5$; elle a donc deux solutions $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation $P(x) = 0$ est donc

$S = \{3;\ \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\}$.

**3-**

On construit le tableau de signes suivant en tenant compte du fait que $x_1 < x_2 < 3$.
On obtient :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 3$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^2 + 3x + 1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $P(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

L'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) \geqslant 0$ est donc $S = [x_1; x_2] \cup [3; +\infty[$,

avec $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

## Exercice 2

**1-** Résoudre l'équation $2u^2 + 5u - 3 = 0$ et en déduire une factorisation de $2u^2 + 5u - 3$.

**2-** Utiliser le résultat précédent pour résoudre les équations :

a) $2x^4 + 5x^2 - 3 = 0$

b) $\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x}-3=0$

**correction**

**1-**

Il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = 25 + 24 = 49$.

Elle a donc deux solutions qui sont : $u_1 = \frac{-5+\sqrt{49}}{4} = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{-5-\sqrt{49}}{4} = -3$.

On en déduit la factorisation : $2u^2 + 5u - 3 = 2(u - \frac{1}{2})(u + 3)$.

**2-**

a) $2x^4 + 5x^2 - 3 = 0$

En posant $u = x^2$, on obtient $2u^2 + 5u - 3 = 0$, soit $2(u - \frac{1}{2})(u + 3) = 0$.

Ce qui donne $2(x^2 - \frac{1}{2})(x^2 + 3) = 0$. D'où :

- soit $x^2 = \frac{1}{2}$, c'est à dire $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$.
- soit $x^2 + 3 = 0$ ce qui n'est pas possible car $x^2 \geqslant 0$.

L'équation a donc deux solutions qui sont $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{-1}{\sqrt{2}}$.

b) $\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x}-3=0$

Cette équation est définie pour $x \neq 0$. En posant $u = \frac{1}{x}$, on obtient $2u^2 + 5u - 3 = 0$,

soit $2(u - \frac{1}{2})(u + 3) = 0$. Ce qui donne $2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}+3\right)=0$. D'où :

soit $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$ et alors $x = 2$; soit $\frac{1}{x}=-3$ et alors $x = -\frac{1}{3}$.

L'équation a donc deux solutions qui sont 2 et $-\frac{1}{3}$