Chapitre 5 – Puissances
- Cours -

I. Puissance entière d'un nombre

1. Puissances positives

Définition : Pour tout nombre relatif **a** et pour tout nombre entier naturel **n** non nul, on a :

$$\mathbf{a^n = a \times a \times a \times \ldots \times a \times a}$$

a apparait n fois

a^n est une puissance de a et se lit "a puissance n"
On a de plus $\mathbf{a^0 = 1}$

Exemples : $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

$10^{12} = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$
$= 1\ 000\ 000\ 000\ 000$

$7^2 = 7 \times 7 = 49$

$(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -32$
la puissance 5 concerne toute la parenthèse

$-5^4 = -5 \times 5 \times 5 \times 5 = -625$
la puissance 4 ne concerne que le 5, il n'y a pas de parenthèse

$(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$

$(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 625$

$-3^3 = -3 \times 3 \times 3 = -27$

Remarques : Une puissance d'un nombre **négatif** est :
- **positive** si la puissance est **paire**
- **négative** si la puissance est **impaire**

2. Puissances négatives

Définition : Pour tout nombre relatif **a** non nul et pour tout nombre entier naturel **n**, on a :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemples :

$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

$7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

$(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81}$

$-3^{-3} = -\frac{1}{3^3} = -\frac{1}{27}$

$10^{-12} = \frac{1}{10^{12}} = \frac{1}{1\,000\,000\,000\,000}$

$(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$

$-5^{-4} = -\frac{1}{5^4} = -\frac{1}{625}$

3. Puissances de 10

On peut utiliser les puissances avec a = 10, dans ce cas là, on a :

$$\mathbf{10^n = 10 \times 10 \times 10 \times \ldots \times 10 \times 10 = 1000...00}$$

10 apparait n fois il y a n fois le chiffre 0

Exemples : $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$
$10^7 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000\,000$
$10^8 = 100\,000\,000$
$1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{15}$

On a également $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n} = 0{,}00...001$ (il y a n fois le chiffre 0)

Exemples : $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$
$10^{-5} = \dfrac{1}{10^5} = \dfrac{1}{100\,000} = 0{,}00001$
$10^{-11} = \dfrac{1}{10^{11}} = 0{,}00000000001$

II. Formules

Il existe **quatre** formules sur les puissances, qui permettent de simplifier des écritures :

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $a^m \times b^m = (ab)^m$ $(a^m)^n = a^{m \times n}$

III. Notation scientifique

Pour écrire certains nombres, on va pouvoir utiliser **l'écriture scientifique** : c'est le produit d'un nombre compris entre 1 et 9 et d'une puissance de 10.

Exemples : **1)** 0,0359 peut s'écrire : $0{,}0359 \times 10^{-1}$ $35{,}9 \times 10^{-3}$
$3{,}59 \times 10^{-2}$ 359×10^{-4}
l'écriture scientifique de ce nombre est $\mathbf{3{,}59 \times 10^{-2}}$

2) 159 000 peut s'écrire : 159×10^3 $1{,}59 \times 10^5$
$15{,}9 \times 10^4$ $0{,}159 \times 10^6$
l'écriture scientifique de ce nombre est $\mathbf{1{,}59 \times 10^5}$

3) donner l'écriture scientifique :
$65\,000 = 6{,}5 \times 10^4$
$0{,}0257 = 2{,}57 \times 10^{-2}$
$0{,}000061 = 6{,}1 \times 10^{-5}$
$0{,}098 \times 10^{-2} = 9{,}8 \times 10^{-2} \times 10^{-2} = 9{,}8 \times 10^{-4}$

Chapitre 5 – Puissances

- Fiche I : Puissances positives -

Rappel de notation : Dans le chapitre sur Pythagore, on a revu la notation "**carré**". Vous connaissez également la notation "**cube**" : $\mathbf{a^2 = a \times a}$

$\mathbf{a^3 = a \times a \times a}$

On dit que **a** est à la **puissance 2** ou à la **puissance 3**.

Définition : Pour tout nombre relatif **a** et pour tout nombre entier naturel **n** non nul, on a :

$$\mathbf{a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a \times a}_{a \text{ apparait } n \text{ fois}}}$$

On a de plus $\mathbf{a^0 = 1}$

Exemples : $3^2 = 3 \times 3 = 9$ $\qquad$ $5^3 = \underline{5 \times 5} \times 5 = 25 \times 5 = 125$

Exercice : Complète.

$2^4 =$ …… × …… × …… × …… = ……

$3^5 =$ …… × …… × …… × …… × …… = ……

Exercice : Calcule mentalement.

$2^5 =$ ……	$9^2 =$ ……	$4^3 =$ ……	$5^3 =$ ……	$6^3 =$ ……	$3^5 =$ ……
$2^9 =$ ……	$10^5 =$ ……	$11^2 =$ ……	$20^3 =$ ……	$15^2 =$ ……	$12^2 =$ ……

On considère maintenant les deux puissances suivantes :

$-3^4 = -3 \times 3 \times 3 \times 3$
$= -81$

Il n'y a pas de parenthèses, seul le 3 est concerné par la puissance 4, le signe – ne se répète pas.

$(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$
$= 81$

Il y a des parenthèses, le signe – est également concerné par la puissance. Il se répète.

Exercice : Calcule mentalement.

$(-2)^5 =$ ……	$-9^2 =$ ……	$-4^3 =$ ……	$(-5)^3 =$ ……	$-6^3 =$ ……	$(-3)^5 =$ ……
$-2^9 =$ ……	$(-10)^5 =$ ……	$-11^2 =$ ……	$(-20)^3 =$ ……	$(-15)^2 =$ ……	$-12^2 =$ ……
$(-6)^2 =$ ……	$(-10)^4 =$ ……	$(-1)^3 =$ ……	$(-7)^2 =$ ……	$(-10)^7 =$ ……	$(-4)^3 =$ ……

Remarque : Une puissance d'un nombre **négatif** est :

- **positive** si la puissance est **paire**
- **négative** si la puissance est **impaire**

Chapitre 5 – Puissances

- Fiche II : Puissances négatives -

……	……	……	……	……	……	1	2	3	4	5
……	……	……	……	……	……	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5
……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……

Définition : Pour tout nombre relatif **a** non nul et pour tout nombre entier naturel **n**, on a :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

On peut donc, sans calculatrice, calculer des puissances négatives :

$$2^{-3} = \frac{1}{\ldots\ldots^{\ldots\ldots}} = \frac{1}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots$$

La valeur décimale (avec virgule) n'est pas forcément utile.

Exercice : Calcule mentalement.

$2^{-5} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $5^{-3} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $3^{-5} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $2^{-9} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $10^{-5} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

$11^{-2} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $20^{-3} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $15^{-2} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $12^{-2} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

Attention : Lorsque le (grand) nombre est négatif, les parenthèses ont leur importance.

Exemples : $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$ ***car (– 2)***$^4 = 16$

$-2^{-4} = -\frac{1}{2^4} = -\frac{1}{16}$

Exercice : Calcule mentalement (ajoute un signe devant s'il y a besoin).

$4^{-3} = \ldots \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $(-8)^{-2} = \ldots \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $9^{-2} = \ldots \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $(-7)^{-3} = \ldots \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

$2^{-6} = \ldots \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $(-3)^{-4} = \ldots \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $(-1)^{-9} = \ldots \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $6^{-3} = \ldots \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

$(-10)^{-8} = \ldots \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $10^{-3} = \ldots \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $16^{-2} = \ldots \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $(-13)^{-2} = \ldots \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

Chapitre 5 – Puissances
- Fiche III : Formules (1) -

1. Première formule

Introduction : Complète les étapes suivantes en utilisant la définition afin d'écrire le résultat sous la forme d'une seule puissance.

$3^2 \times 3^4 = (\ldots\ldots \times \ldots\ldots) \times (\ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots)$

$= \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots$

$= \ldots\ldots$ or $2 + 4 = \ldots\ldots$

$7^8 \times 7^{-6} = 7^8 \times \dfrac{1}{\ldots\ldots} = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

$= \dfrac{\ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots}{\ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots} = \ldots\ldots$ or $8 + (-6) = \ldots\ldots$

Cela revient à **aditionner** les puissances, on a donc : $\boxed{\mathbf{a^m \times a^n = a^{\cdots\cdots}}}$

Exercice : Ecrire sous la forme d'une seule puissance.

$9^5 \times 9^3 \times 9^6 = \ldots\ldots$	$6^2 \times 6^3 = \ldots\ldots$	$7^2 \times 7^4 = \ldots\ldots$	$4^3 \times 4^8 = \ldots\ldots$
$5 \times 5^3 = \ldots\ldots$	$6^2 \times 6^8 = \ldots\ldots$	$9^6 \times 9 \times 9^5 = \ldots\ldots$	$11^4 \times 11^2 \times 11 \times 11^3 = \ldots\ldots$
$2^{-4} \times 2^6 \times 2^{-7} = \ldots\ldots$	$8^7 \times 8^{-3} = \ldots\ldots$	$11^{-6} \times 11^3 = \ldots\ldots$	$6^7 \times 6^{-9} \times 6^4 = \ldots\ldots$
$3^4 \times 3^{-6} = \ldots\ldots$	$9^4 \times 9^{-6} \times 9^2 = \ldots\ldots$	$12^5 \times 12^{-8} = \ldots\ldots$	$2^{-7} \times 2^6 \times 2^{-4} = \ldots\ldots$

2. Seconde formule

Introduction : Complète les étapes suivantes en utilisant la définition afin d'écrire le résultat sous la forme d'une seule puissance.

$\dfrac{4^7}{4^5} = \dfrac{\ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots}{\ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots} = \ldots\ldots$ or $7 - 5 = \ldots\ldots$

$\dfrac{11^8}{11^{-5}} = 11^8 \times \dfrac{1}{\ldots\ldots} = 11^8 \times 11^{\cdots\cdots} = \ldots\ldots$ or $8 - (-5) = 8 + 5 = \ldots\ldots$

Cela revient à **soustraire** les puissances (haut moins bas), on a donc : $\boxed{\mathbf{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{\cdots\cdots}}}$

Exercice : Ecrire sous la forme d'une seule puissance.

$\dfrac{9^3}{9^6} = \ldots\ldots$	$\dfrac{6^2}{6^3} = \ldots\ldots$	$\dfrac{7^2}{7^4} = \ldots\ldots$	$\dfrac{4^3}{4^8} = \ldots\ldots$
$\dfrac{5}{5^3} = \ldots\ldots$	$\dfrac{6^2}{6^8} = \ldots\ldots$	$\dfrac{9^6}{9^5} = \ldots\ldots$	$\dfrac{11}{11^3} = \ldots\ldots$
$\dfrac{2^6}{2^{-7}} = \ldots\ldots$	$\dfrac{8^7}{8^{-3}} = \ldots\ldots$	$\dfrac{11^{-6}}{11^3} = \ldots\ldots$	$\dfrac{6^7}{6^{-9}} = \ldots\ldots$
$\dfrac{3^4}{3^{-6}} = \ldots\ldots$	$\dfrac{9^4}{9^{-6}} = \ldots\ldots$	$\dfrac{12^5}{12^{-8}} = \ldots\ldots$	$\dfrac{2^{-7}}{2^6} = \ldots\ldots$

Chapitre 5 – Puissances
- Fiche III : Formules (2) -

3. Troisième formule

Introduction : Compléter les étapes suivantes en utilisant la définition afin d'écrire le résultat sous la forme d'une seule puissance.

$2^3 \times 7^3 = (\ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots) \times (\ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots)$
$= (\ldots\ldots \times \ldots\ldots) \times (\ldots\ldots \times \ldots\ldots) \times (\ldots\ldots \times \ldots\ldots)$
$= \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots$
$= \ldots\ldots$ or $2 \times 7 = \ldots\ldots$

$5^2 \times (-3)^2 = (\ldots\ldots \times \ldots\ldots) \times ((\ldots\ldots) \times (\ldots\ldots))$
$= (\ldots\ldots \times (\ldots\ldots)) \times (\ldots\ldots \times (\ldots\ldots))$
$= (\ldots\ldots) \times (\ldots\ldots)$
$= (\ldots\ldots)^2$ or $5 \times (-3) = \ldots\ldots$

Cela revient à **multiplier** les nombres, on a donc : $\boxed{\mathbf{a^m \times b^m = \ldots\ldots}}$

Exercice : Ecrire sous la forme d'une seule puissance.

$2^3 \times 5^3 = \ldots\ldots\ldots$	$3^6 \times 7^6 = \ldots\ldots\ldots$	$2^4 \times 3^4 = \ldots\ldots\ldots$	$6^2 \times 8^2 = \ldots\ldots\ldots$
$9^2 \times 9^4 = \ldots\ldots\ldots$	$3^8 \times 5^8 = \ldots\ldots\ldots$	$11^3 \times (-7)^3 = \ldots\ldots\ldots$	$(-9)^4 \times (-6)^4 = \ldots\ldots\ldots$
$7^5 \times 9^5 = \ldots\ldots\ldots$	$(-3)^1 \times (-2)^1 = \ldots\ldots\ldots$	$4^6 \times (-3)^6 = \ldots\ldots\ldots$	$7^6 \times (-2)^6 = \ldots\ldots\ldots$
$(-3)^5 \times (-9)^5 = \ldots\ldots\ldots$	$(-11)^6 \times 3^6 = \ldots\ldots\ldots$	$7^9 \times (-6)^9 = \ldots\ldots\ldots$	$3^2 \times 4^2 = \ldots\ldots\ldots$

Fais apparaître une puissance :

$4^2 \times 25 = 4^2 \times \ldots\ldots^{\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $27 \times 125 = \ldots\ldots^{\ldots\ldots} \times \ldots\ldots^{\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots$

4. Quatrième formule

Introduction : Compléter les étapes suivantes en utilisant la définition afin d'écrire le résultat sous la forme d'une seule puissance.

$(5^2)^4 = (\ldots\ldots) \times (\ldots\ldots) \times (\ldots\ldots) \times (\ldots\ldots)$
$= (\ldots\ldots \times \ldots\ldots) \times (\ldots\ldots \times \ldots\ldots) \times (\ldots\ldots \times \ldots\ldots) \times (\ldots\ldots \times \ldots\ldots)$
$= \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots$
$= \ldots\ldots$ or $2 \times 4 = \ldots\ldots$

$(7^3)^{-4} = \dfrac{1}{\ldots\ldots\ldots} = \dfrac{1}{7^{\ldots\ldots}} = 7^{\ldots\ldots}$ or $3 \times (-4) = \ldots\ldots$

Cela revient à **multiplier** les puissances, on a donc : $\boxed{\mathbf{(a^m)^n = a^{\ldots\ldots\ldots}}}$

Exercice : Ecrire sous la forme d'une seule puissance.

$(7^8)^9 = \ldots\ldots\ldots$	$(4^5)^8 = \ldots\ldots\ldots$	$(2^3)^5 = \ldots\ldots\ldots$	$(11^6)^4 = \ldots\ldots$	$(2^3)^8 = \ldots\ldots\ldots$	$(7^9)^4 = \ldots\ldots\ldots$
$(5^6)^2 = \ldots\ldots\ldots$	$(4^3)^6 = \ldots\ldots\ldots$	$(4^8)^{-5} = \ldots\ldots$	$(9^{-8})^{-5} = \ldots\ldots$	$(7^{-5})^6 = \ldots\ldots$	$(6^4)^{-7} = \ldots\ldots$

Chapitre 5 – Puissances

- Fiche IV : Notation scientifique -

Cas particulier : On peut utiliser les puissances avec a = 10, dans ce cas là, on a :

$$\mathbf{10^n = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \ldots \times 10 \times 10}_{\textit{10 apparait n fois}} = \underbrace{1000...00}_{\textit{il y a n fois le chiffre 0}}}$$

Exemples : $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$ $\quad$ $10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000$

$10^8 = 100\,000\,000$ $\quad$ $1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{15}$

On a également $\quad 10^{-n} = \dfrac{1}{10^n} = 0{,}00...001 \longleftarrow$ *il y a n fois le chiffre 0*

Exemples : $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$ $\quad$ $10^{-5} = \dfrac{1}{10^5} = \dfrac{1}{100\,000} = 0{,}00001$

$10^{-11} = 0{,}00000000001$

Exercice : Calcule mentalement.

$10^5 =$ …… $\quad 10^{-2} =$ …… $\quad 10^{-3} =$ …… $\quad 10^3 =$ …… $\quad 10^4 =$ …… $\quad 10^{-7} =$ ……

On va utiliser les puissances de 10 pour la **notation scientifique** :

C'est le **produit** d'un **nombre compris entre 1 et 10** (exclu) et d'une **puissance de 10**.

Exemples : $0{,}0359 = 3{,}59 \times 10^{-2}$ $\quad$ $159\,000 = 1{,}59 \times 10^5$

Exercice : Donne l'écriture scientifique des nombres suivants.

65 000 = …… $\quad$ 0,000061 = ……

0,0257 = …… $\quad$ 0,098 = ……

$0{,}098 \times 10^{-2} =$ …… = ……