En dimension n c'est plus chiant!

En faisant un joli changement de variable dans mon intégrale à n variables: $x_{n'} = x_n - x_{n-1}, ..., x_{2'} = x_2 - x_1$ et $x_{1'} = x_1$ on obtient les conditions

$0 < x_{1'} < 1/2$

$0 < x_{2'} < 1/2$

...

$0 < x_{n'} < 1/2$

$1/2 < x_{1'} + x_{2'} + ... + x_{n'} < 1$

(le jacobien de ce changement de variables vaut 1)

Donc on se retrouve à cherche le volume d'une tranche d'hypercube de côté 1/2, délimitée par des hyperplans perpendiculaires à la grande diagonale.

Et d'après wikipedia, ça fait intervenir les nombres eulériens:

https://fr.wikipedia.org/wiki/Hypercube

https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_eul%C3%A9rien

En l'occurrence ici celui pour m=1. Donc on a comme jolie formule finale de la probabilité pour un polygone à n côtés:

probabilité $= \frac{A(n-1,1)}{2^{n-1}}$

et il semblerait que $A(n, 1) = 2^n - n - 1$

Donc

probabilité $= 1 - \frac{n}{2^{n-1}}$

(ça colle avec les résultats pour n=3 et n=4)

Bon vu la formule finale, doit y avoir un moyen un peu (beaucoup?) moins bourrin d'y arriver!