OFFICE DU BACCALAUREAT

Durée : 4 heures

Séries : S2 - Coeff. 5

Téléfax (221) 824 65 81 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

Epreuve du 2$^{\text{ème}}$ groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n°5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1. (04 **points**) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 - (3+2i)z^2 + (1+4i)z + 1 - 2i = 0$$

1. a) Déteminer la solution réelle de cette équation.

b) Montrer que i est une solution de cette équation.

c) Déteminer la troisième solution de cette équation.

2. Soient les points A, B et C d'affixes respectives 1, i et $2+i$.

a) Déterminer le module et un argument de $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe du point D image de A par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

d) Montrer que A, B, C et D sont sur un cercle de centre $I(1+i)$ et de rayon r à déterminer.

EXERCICE 2. (04 **points**)**1.** On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note p_i la probabilité d'apparition de la face i. Les p_i vérifient :

$$p_1 = p_2;\ p_3 = p_4 = 2p_1;\ p_5 = p_6 = 3p_1$$

a) Montrer que $p_1 = \dfrac{1}{12}$.

b) Montrer que la probabilité de l'événement A : "Obtenir 3 ou 6" est égale à $\dfrac{5}{12}$.

2. Un jeu d'adresse consiste à lancer le dé décrit ci-dessus puis à lancer une flêchette sur une cible fixe.

Si le joueur obtient 3 ou 6, il se place à 5 m de la cible et lance la flêchette ; à 5 m, la probabilité d'atteindre la cible est alors $\dfrac{3}{5}$.

Si l'événement A n'est pas réalisé, il se place à 7 m de la cible et lance la flêchette ; à 7 m, la probabilité d'atteindre la cible est alors $\dfrac{2}{5}$.

On note C l'événement : "La cible est atteinte".

a) Déterminer $p(C/A$ et $p(C/\overline{A})$.

En déduire que $p(C) = \dfrac{29}{60}$.

b) Déterminer $p(A/C)$.

3. Le joueur dispose de 10 flêchettes qu'il doit lancer une à une, de façon indépendante, dans les mêmes conditions que précédemment définies.

Calculer la probabilité qu'il atteigne la cible exactement 4 fois.

PROBLEME. (12 **points**)

I. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = 1 + x = \ln x$.

1. Dresser le tableau de variations de g.

2. Montrer qu'il existe un unique réel α élément de l'intervalle $]0,2;\ 0,3[$, solution de l'équation $g(x) = 0$.

3. En déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$.

4. Etablir la relation : $\ln(\alpha) = -1 - \alpha$.

II. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1+x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue en 0 puis sur $]0;+\infty[$.

2. Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. Montrer que quelque soit x élément de $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)^2}$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

5. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$.

6. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

7. Représenter la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Unité graphique 5 cm. Prendre $\alpha = 0.3$

III. 1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{e} x.\ln(x)\,dx$.

2. Montrer que pour tout x élément de $[1, e]$, $\dfrac{x\ln x}{e+1} \leq f(x) \leq \dfrac{x\ln x}{2}$. En déduire que :

$$\frac{e^2+1}{4(e+1)} \leq \int_1^{e} f(x)\,dx \leq \frac{e^2+1}{8}$$

B A R E M E :

.

Ex 1 : 04 pts							**Ex 2 : 04 pts**				
1			2				1		2		3
a	b	c	a	b	c	d	a	b	a	b	
0,5	1	0,5	0,5	1	0,5	0,5	0,5	1	0,5	1	0,5

Problème : 12 pts												
I : 03 pts				**II : 06,5 pts**							**III : 02,5 pts**	
1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	7	1	2
1,5	0,5	0,5	0,5	1	1	0,5	1,5	0,5	0,5	1,5	1	1,5

Correction :

Exercice 1. 1. a. Posons $P(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+4i)z + 1 - 2i$

Si $k \in \mathbb{R}$ est une solution l'équation, en séparant la partie réelle de la partie imaginaire dans le polynôme $P(k)$, on obtient : $P(k) = k^3 - 3k^2 + k + 1 + (-2k^2 + 4k - 2)i = 0$ c'est à dire

$$\begin{cases} k^3 - 3k^2 + k + 1 = 0 \\ -k^2 + 2k - 1 = 0 \end{cases}$$

Parmi ces deux équations la plus simple à résoudre est la deuxième : elle admet 1 comme solution double. Ensuiite on vérifie que ce 1 est bien solution de la première équation. Donc $k = 1$.

b. Un calcul direct me donne $P(i) = 0$. Donc i est solution de l'équation.

c. On déduit de a. et b. que $z-1$ et $z-i$ sont des facteurs de P. L'autre facteur étant nécessairement un polynôme du premier degré se met sous la forme $az+b$. On obtient :
$P(z) = (z-1)(z-i)(az+b) = [z^2 - (1+i)z + i](az+b)$
En développant et en identifiant à l'expression initiale de P, il vient $a = 1$ et $b = -2-i$. La troisième solution de l'équation est donc $\dfrac{-b}{a} = 2 + i$.

2. a. $Z = \dfrac{1+i}{i-1}$

Donc $|Z| = \dfrac{|1+i|}{|1-i|} = 1$ car le numérateur $1+i$ et le dénominateur $1-i$ étant conjugués, ont même module.

Et $\arg Z \equiv \arg(1+i) - arg(i-1) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3\pi}{4} \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

b. On tire du a. que : $\dfrac{AC}{AB} = |Z| = 1$, donc le triangle ABC est isocèle de sommet A.

Ensuite $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg Z = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$; donc le triangle ABC indirect et rectangle en A.

c. l'affixe du point D est défini par :

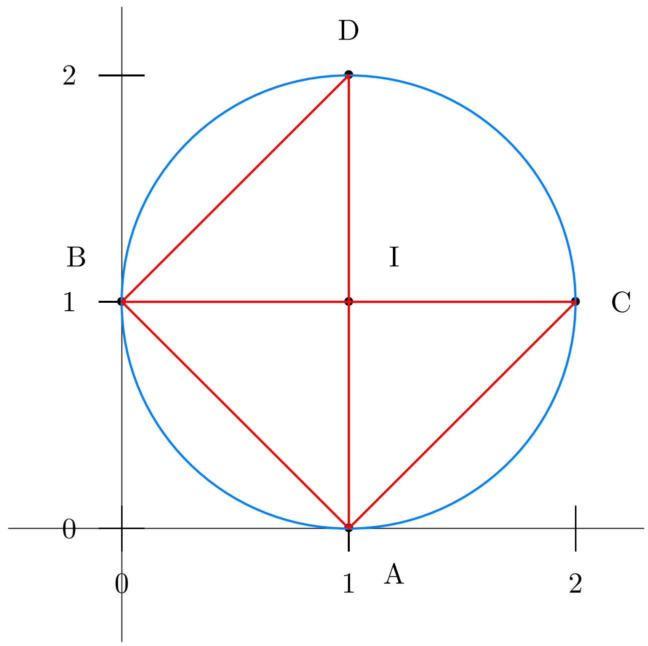
$$z_D - z_B = i(z_A - z_B)$$

donc $z_D = i + i(1-i) = 1 + 2i$.

d. On a

$$|AI| = |i| = 1; |BI| = |1| = 1; |CI| = |-1| = 1; |DI| = |i| = 1$$

Donc les points A, B, C et D appartiennent au cercle de centre I et de rayon 1.



EXERCICE 2. 1. a. On doit avoir $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$; $12p_1 = 1$ ou $p_1 = \frac{1}{12}$; ensuite

$$p_2 = \frac{1}{12}; p_3 = p_4 = \frac{1}{6} = p_5 = p_6 = \frac{1}{4}$$

.

b. Notons A_i l'événement : "Obtenir i" de sorte que $p(A_i) = p_i$. Les événements A_3 et A_6 sont incompatibles et $A = A_3 \cup A_6$, donc

$$p(A) = p(A_3 \cup A_6) = p(A_3) + p(A_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

2. a. On a $p(C/A) = \frac{3}{5}$ et $p(C/\overline{A}) = \frac{2}{5}$.

b. On peut écrire en désignant par Ω l'univers :

$$C = C \cap \Omega = C \cap (A \cup \overline{A}) = (C \cap A) \cup (C \cap \overline{A})$$

Puis, comme les événements $(C \cap A)$ et $(C \cap \overline{A})$ sont incompatibles,

$$(p(C) = p[C \cap A) \cup (C \cap \overline{A})] = p(C \cap A) + p(C \cap \overline{A}) = p(C/A)p(A) + p(C/\overline{A})p(\overline{A})$$

Application numérique : $p(C) = \frac{3}{5}\frac{5}{12} + \frac{2}{5}\frac{7}{12} = \frac{29}{60}$.

b.

$$p(A/C) = \frac{p(A\cap C)}{p(C)} = \frac{p(C/A).p(A)}{p(C)}$$

Application numérique : $p(A/C) = \frac{3}{5}\frac{5}{12}\frac{29}{60} = \frac{15}{29}$.

3. $p(\text{atteindre 4 fois}) = C_{10}^4[p(\text{atteindre })]^4.[p(\overline{\text{atteindre}})]^6$

Application numérique : $p(\text{atteindre 4 fois}) = C_{10}^4(\frac{29}{60})^4.p(\frac{31}{60})^6$

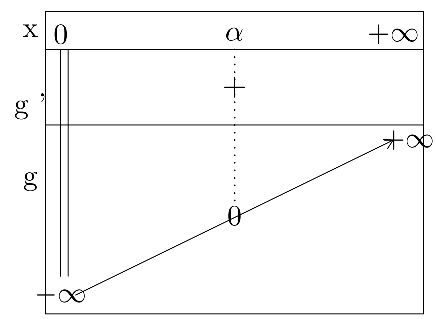
La fonction g est continue et dérvable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

La dérivée est donc strictement positive. La fonction g est strictement croissante et

$$\lim_{x\mapsto 0} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\mapsto +\infty} g(x) = +\infty.$$

Voici le tableau de variations de g :



On voit nettement d'après le tableau de variations que la fonction g est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$;

Par conséquent l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique.

On a $g(0.2) \simeq -0,409437912$ et $g(0.3) \simeq 0,096027196$ (excel).

Puisque $g(0.2)$ et $g(0.3)$ sont de signe contraire, $\alpha \in]0.2,\ 0.3[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Le tableau de variations montre aussi que g est > 0 dans $]\alpha,\ +\infty[$ et g est < 0 dans $]0,\ \alpha[$

4. La relation $g(\alpha) = 0$ est équivalente à

$$1 + \alpha + \ln\alpha = 0 \ \text{ c'est à dire } \quad \ln\alpha = -\alpha - 1$$

II. 1. $\lim_{x\mapsto 0^+} x\ln x = 0$ et $\lim_{x\mapsto 0^+} 1 + x = 1$, donc

$$\lim_{x\mapsto 0^+} f(x) = \lim_{x\mapsto 0^+} x\ln x.\frac{1}{1+x} = 0 = f(0)$$

La fonction f est donc continue au point 0.

Dans $]0,+\infty[$, f est un "amalgame" des fonction continues $x \mapsto x$, $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$; elle est donc continue dans cet intervalle.

2. Dérivabilité en 0 : Pour tout $h > 0$ on a $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{\ln h}{1+h} \xrightarrow{h \mapsto 0^+} -\infty$.

La fonction f n'est donc pas dérivable en 0, en revanche son graphe admet en son point d'abcisse 0 (qui l'origine des coordonnées) une demi tangente verticale.

3. $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x}{1+x}.\ln x = +\infty$ car

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x}{1+x} = 1 \text{ et } \lim_{x \mapsto +\infty} \ln x = +\infty$$

4. La fonction f est dérivable dans $\mathbb{R}+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}+^*,\ f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(1+x) - x \ln x}{(1+x)^2} = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$$

f a donc même signe que g. c'est à dire : f' est > 0 dans $]\alpha,\ +\infty[$ et f' est < 0 dans $]0,\ \alpha[$.

$$f(\alpha) = \frac{\alpha \ln \alpha}{1+\alpha} = \frac{\alpha(-\alpha - 1)}{1+\alpha} = -\alpha$$

Voici le tableau de variation de la fonction f.

x	0		α		$+\infty$
f '	$\Vert$	-	0	+	
f	0	$\searrow$	$-\alpha$	$\nearrow$	$+\infty$

Comportement asymptotique :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\ln x}{1+x} = 0$$

Il y a donc une branche parabolique de direction l'axe des abcsisses.

III. 1. Une intégration par parties rapide donne :

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x = \frac{1}{2} \int_1^{\mathrm{e}} \ln x d(x^2) = \frac{1}{2}\left\{[x^2 \ln x]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x^2 \frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{2}[x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^2 + 1)$$

Si $x \in [1,\ \mathrm{e}]$, alors $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}} \leq \dfrac{1}{1+x} \leq \dfrac{1}{1+1}$ car la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ est décroissante, étant donné que sa dérivée $t \mapsto \dfrac{-1}{(1+t)^2}$ est négative.

Je multiplie cette chaîne d'inégalités par le nombre positif $x \ln x$ pour avoir :

$$\frac{x \ln x}{1+\mathrm{e}} \leq f(x) \leq \frac{x \ln x}{2}$$

Ensuite j'intègre de 1 à e

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}}I \leq \int_1^{\mathrm{e}} f(x)dx \leq \frac{1}{2}I$$

c'est à dire en remplaçant I par sa valeur :

$$\frac{\mathrm{e}^2+1}{4(1+\mathrm{e})} \leq \int_1^{\mathrm{e}} f(x)dx \leq \frac{\mathrm{e}^2+1}{8}$$