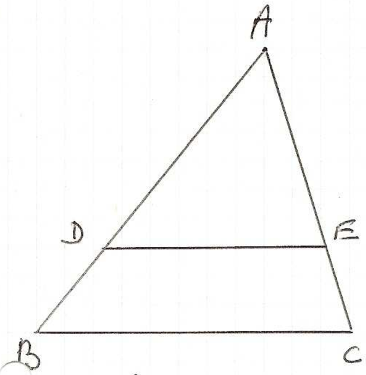
Le théorème de Thalès



Sachant que (DE) // (BC) nous savons que $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

et par conséquent

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Jouons avec les proportions

1. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ donc

$$AD.AC = AB.AE$$
$$AD(AE+EC) = (AD+DB)AE$$
$$AD.AE + AD.EC = AD.AE + DB.AE$$
$$AD.EC = DB.AE$$

d'où $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

2. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ donc

$$AD.AC = AB.AE$$
$$(AB-BD)AC = AB(AC-EC)$$
$$AB.AC - BD.AC = AB.AC - AB.EC$$
$$-BD.AC = -AB.EC$$
$$BD.AC = AB.EC$$

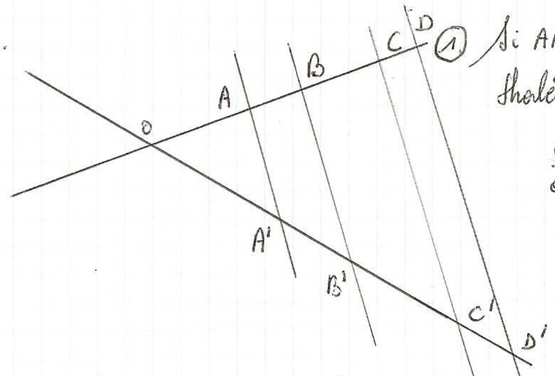
d'où $\frac{BD}{AB} = \frac{EC}{AC}$

3. $$\left.\begin{array}{l} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \\ \frac{BD}{AB} = \frac{EC}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{EC} = \frac{AB}{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{EC}}$$

Propriété dite de Thalès

Généralisation

A.



① Si $AA' // BB'$
Thalès nous dit :

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

② Ajoutons la droite $(CC') // (BB')$: dans le Δ OCC', $(BB') // (CC')$

$$\frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

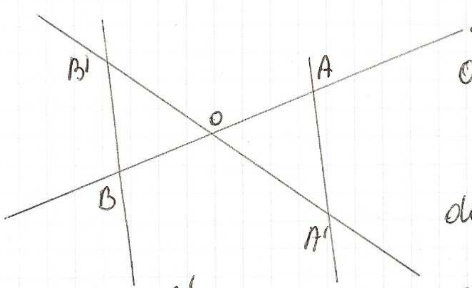
en associant ① et ② : $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$

③ Ajoutons une droite $(DD') // (CC')$

On observe de la même manière

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B} = \cdots\cdots$$

B. Autre situation



Sachant que $(AA') // (BB')$

On a $\Delta OAA'$ $\Delta OBB'$ car $A\hat{O}A' = B\hat{O}B'$, $A\hat{A'}O = B\hat{B'}O$

donc $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$ $\left(= \frac{AA'}{BB'}\right)$

en permutant les moyens on a

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

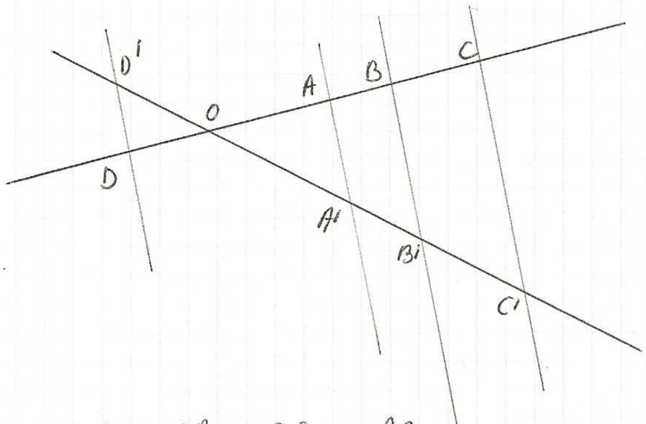
$\frac{OA}{OA'} = r \Rightarrow OA = r \cdot OA'$

$\frac{OB}{OB'} = r \Rightarrow OB = r \cdot OB'$

$OA + OB = r(OA' + OB')$

$AB = r \cdot A'B' \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{A'B'} = r.$

En associant A et B



1) $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{AB}{A'B'} = \ldots$

2) $\frac{OA}{OA'} = \frac{OD}{OD'} = \frac{AD}{A'D'}$

En résumé

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OD}{OD'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AD}{A'D'} = \ldots$$

En français

Des parallèles déterminent sur deux droites des segments homologues de longueurs proportionnelles