Définition 2 : **La fonction de répartition Φ est la fonction de répartition de la variable aléatoire Z qui suit une loi normale centrée réduite N (0 ; 1)**

est donc définie par : $P(Z \leq x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$.

Définition 3: Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite :

L'espérance de Z: $E(Z) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx = 0$

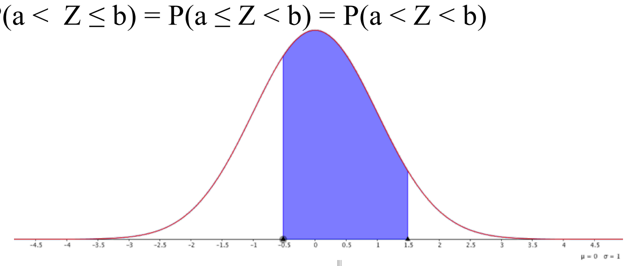
La variance de Z : $V(Z) = E((Z-\mu)^2) = 1$

L'écart type de Z : $\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = 1$

PROPRIETES : CALCUL DE PROBABILITE

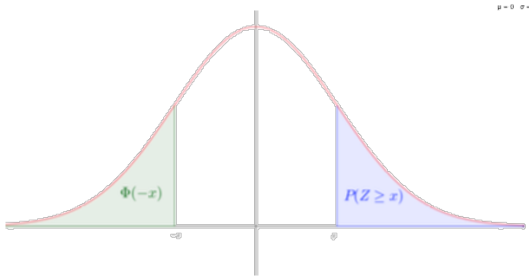
On dit qu'une variable aléatoire Z sur IR suit la loi normale centrée réduite si la probabilité que Z soit compris entre a et b est l'aire du domaine sous la courbe en cloche entre les droites d'équations x = a et x = b.

1 . $P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = P(a < Z \leq b) = P(a \leq Z < b) = P(a < Z < b)$



D'où : $P(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

2. Pour tout réel u positif, $P(X \leq -u) = P(X \geq u)$ **;**



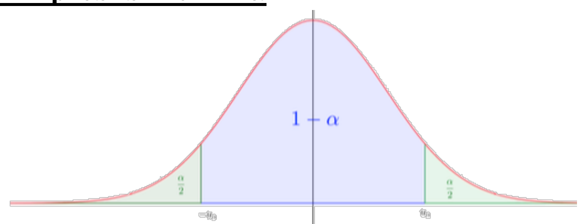
3. $P(0 \leq X) = P(X \geq 0) = 0{,}5$.

Remarques, les résultats à connaitre: $P(-1 \leq Z \leq 1) \simeq 0{,}683$ $\quad P(-2 \leq Z \leq 2) \simeq 0{,}95$ $\quad P(-3 \leq Z \leq 3) \simeq 0{,}997$

b) Déterminer un intervalle $[-u_\alpha ; u_\alpha]$ centrée en 0, dont on connaît la probabilité $1-\alpha$

Propriété : Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi N (0 ; 1).
Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$.
Il existe un unique nombre strictement positif u_α tel que :

$P(-u_\alpha < Z < u_\alpha) = 1 - \alpha$



Valeurs à connaître : $u_{0,05} \approx 1{,}96$ **et** $u_{0,01} \approx 2{,}58$.

Démonstration de l'unicité de cette solution u_α:

On cherche $x > 0$ tel que $P(-x < Z < x) = 1 - \alpha$.

On a : $P(-x < Z < x) = P(Z < x) - P(Z \leq -x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1$

D'où :

$$\begin{aligned} 2\Phi(x) - 1 &= 1 - \alpha \\ 2\Phi(x) &= 2 - \alpha \\ \Phi(x) &= 1 - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

De plus, la fonction Φ est continue sur $[0;+\infty[$, strictement croissante.
$\Phi(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$.

Comme :

$$\begin{array}{rcl} 0 < & \alpha & < 1 \\ -1 < & -\alpha & < 0 \\ -\frac{1}{2} < & -\frac{\alpha}{2} & < 0 \\ \frac{1}{2} < & 1 - \frac{\alpha}{2} & < 1 \end{array}$$

Pour déterminer le réel u_α, on utilise la calculatrice.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\Phi(x) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ admet une seule solution sur $]0;+\infty[$. On note cette solution u_α.