Lois à densité

1 Loi à densité sur un intervalle

1.1 Variable aléatoire continue

Définition — **Variable aléatoire continue**

Une variable aléatoire continue X est une fonction qui à chaque issue de l'univers Ω d'une expérience aléatoire, associe un nombre réel d'un intervalle I de $\mathbb{R}$. 1

Exemple 1. On lance une flèche sur une cible de rayon 1 mètre et on mesure la distance d entre le point d'impact et le centre de la cible (en mètres). Le réel d peut prendre une infinité de valeurs dans l'intervalle $[\,0\,;\,1\,]$.

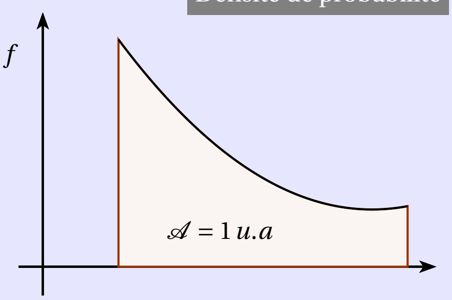
Exemple 2. On s'intéresse à la durée de fonctionnement normal des appareils fabriqués par une entreprise. Cette durée est une variable aléatoire dont les valeurs appartiennent à un intervalle de temps.

1.2 Loi de probabilité à densité

Définition — **Densité de probabilité**

I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, on appelle densité de probabilité sur I une fonction f telle que :

- f est continue et positive sur I.
- Sur l'intervalle I, l'aire sous la courbe représentative de f est égale à une unité d'aire. 2



Remarque 1 : Le deuxième point de la définition se traduit de différentes manières selon la nature de l'intervalle I :

i) Si $\mathrm{I} = [\,a\,;\,b\,]$ avec a et b réels alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

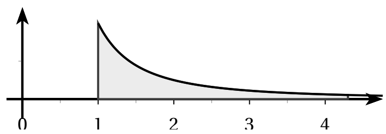
ii) Si $\mathrm{I} = [\,a\,;\,+\infty\,[$ avec $a \in \mathbb{R}$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

iii) Si $\mathrm{I} =]\,-\infty\,;\,a\,]$ avec $a \in \mathbb{R}$ alors $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

iv) Si $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ alors $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

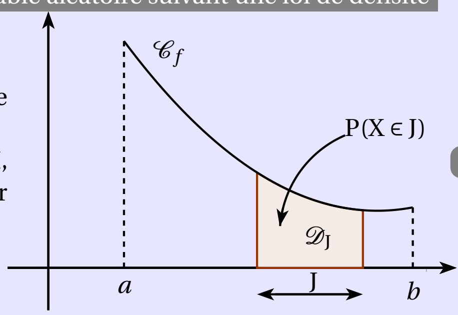
▷ **Exercice 1.** Montrer que la fonction f définie sur $[\,0\,;\,1\,]$ par $f(t) = -2t+2$ est une densité de probabilité sur $[\,0\,;\,1\,]$.

▷ **Exercice 2.** Montrer que la fonction g définie sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ par $g(t) = \dfrac{1}{t^2}$ est une densité de probabilité sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$.



Définition — **Variable aléatoire suivant une loi de densité**

Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans un intervalle I et f une densité de probabilité sur I.
On dit que X suit la loi de probabilité de densité f si pour tout intervalle $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, la probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{J})$ est égale à l'aire du domaine $\mathscr{D}_\mathrm{J}$ sous la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle J. 3



Propriété — **Conséquences**

(1) Si $J = [\,\alpha\,;\,\beta\,] \subset I$, alors $P(X \in J) = P(X \in [\,\alpha\,;\,\beta\,]) = P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$

(2) Pour $c \in \mathbb{R}$, $P(X = c) = 0$. La probabilité que X prenne une valeur isolée est nulle.

(3) On déduit du (2) que si $[\,\alpha\,;\,\beta\,] \subset I$, alors $P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = P(\alpha < X \leqslant \beta) = P(\alpha \leqslant X < \beta) = P(\alpha < X < \beta)$

(4) $P(X \notin J) = 1 - P(X \in J)$ et $P(X > c) = 1 - P(X \leqslant c)$ 4

Remarque 2 : Les propriétés des probabilités étudiées dans le cas discret restent vraies.

Notamment : $$P_{X \in J'}(X \in J) = \frac{P\left(X \in J \cap J'\right)}{P\left(X \in J'\right)}$$

▷ **Exercice 3.** Soit X une variable aléatoire qui suit, sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}\,;\,e\right]$, une loi de probabilité de densité f définie par $f(x) = \frac{k}{x}$.

1. Déterminer k.
2. Montrer que la valeur exacte de $P(\,1 \leqslant X \leqslant e)$ est un nombre rationnel.
3. Calculer $P(\,X \geqslant 2\,)$, $P(\,X < 0{,}5\,)$ et $P_{X\in[1;2{,}5]}(X > 2)$

▷ **Exercice 4.** La variable aléatoire X qui mesure la distance au centre d'une flèche atteignant une cible de rayon 1 m suit la loi de probabilité de densité f où f est la fonction définie sur $[\,0\,;\,1\,]$ par $f(x) = 2x$.

Calculer :

- $P(0{,}4 \leqslant X \leqslant 0{,}7)$
- $P(X > 0{,}5)$
- $P(X \leqslant 0{,}9)$
- $P_{X>0{,}5}(X < 0{,}7)$

2 Loi uniforme

2.1 Exemple

La loi uniforme modélise l'expérience aléatoire qui consiste à choisir un nombre réel de manière aléatoire dans un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$. (voir activités d'introduction).

2.2 Définition et propriété

Définition — **Loi uniforme**

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[\,a\,;\,b\,]$ si sa densité de probabilité est une fonction constante sur $[\,a\,;\,b\,]$. 5

Propriété — **Densité de probabilité d'une loi uniforme**

La densité de probabilité de la loi uniforme sur $[\,a\,;\,b\,]$ est la fonction f définie sur $[\,a\,;\,b\,]$ par $f(x) = \frac{1}{b-a}$. 6

DÉMONSTRATION :
f est une fonction constante donc il existe un réel λ tel que pour tout $x \in [\,a\,;\,b\,]$, $f(x) = \lambda$.

$$\int_a^b \lambda\,\mathrm{d}t = 1 \iff [\lambda\, t]_a^b = 1 \iff \lambda b - \lambda a = 1 \iff \lambda = \frac{1}{b-a}.$$

Propriété — **Calcul d'une probabilité avec la loi uniforme**

Si X suit la loi uniforme sur $[\,a\,;\,b\,]$ et si $[\,c\,;\,d\,] \subset [\,a\,;\,b\,]$ alors $P(X \in [\,c\,;\,d\,]) = \frac{d-c}{b-a}$ 7

DÉMONSTRATION :

Exemple 3. On choisit au hasard un nombre de l'intervalle $[\,2\,;\,7\,]$. Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit :

- compris entre 3,4 et 6,1
- soit supérieur à 5
- soit inférieur à 3

3 Espérance mathématique

Définition — Espérance mathématique — 8

Soit X une variable aléatoire continue sur un intervalle $[\, a\,;\, b\,]$ qui suit la loi de probabilité de densité f.

On appelle espérance mathématiques de X le nombre E(X) défini par $\mathrm{E(X)} = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple 4. X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\,2\,;\,7\,]$. Sa fonction de densité est donc la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{7-2} = \frac{1}{5}$.

$$\mathrm{E(X)} = \int_2^7 \frac{1}{5} x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{10}x^2\right]_2^7 = \frac{1}{10} \times 7^2 - \frac{1}{10} \times 2^2 = 4{,}5.$$

Propriété — Espérance de la loi uniforme — 9

Si X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\, a\,;\, b\,]$ alors $\mathrm{E(X)} = \frac{a+b}{2}$.

DÉMONSTRATION :

▷ **Exercice 5.** Déterminer l'espérance de la variable aléatoire qui donne la distance au centre de l'impact d'une flèche lancée au hasard sur une cible de rayon 1 m.

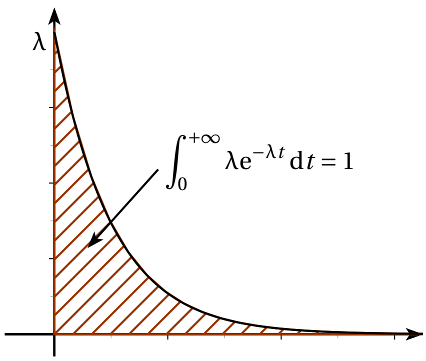
4 Lois Exponentielles

Exemple 5. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto 0{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5x}$ est une densité de probabilité sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

4.1 Définitions et propriétés

Définition — Loi exponentielle de paramètre λ — 10

Soit λ un nombre réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire continue X suit la loi exponentielle de paramètre λ sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ par $f(x) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$.



Propriété — Calcul de probabilité avec la loi exponentielle — 11

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.
Pour tout intervalle $[\, c\,;\, d\,]$ contenu dans $[\,0\,;\,+\infty\,[$, on a :

- $\mathrm{P}(c \leq \mathrm{X} \leq d) = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$
- $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq c) = \mathrm{e}^{-\lambda c}$

DÉMONSTRATION :
Premier point immédiat... Deuxième point : $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq c) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} < c) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq c) = 1 - \mathrm{P}(0 \leq \mathrm{X}C \leq c) = 1 - \left(\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-\lambda c}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda c}$

4.2 Espérance

Propriété — **Espérance de la loi exponentielle**

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. L'espérance de X est $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{1}{\lambda}$. 12

DÉMONSTRATION :
Calculons $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$

Il nous faut donc connaitre une primitive sur $[0\,;\,+\infty[$ de la fonction $g : t \longmapsto \lambda t e^{-\lambda t}$. On admet qu'une primitive de g est la fonction G de la forme $\mathrm{G}(t) = (at+b)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ où a et b sont deux réels à déterminer.
Ainsi pour tout réel $t \geq 0$, $\mathrm{G}'(t) = a\mathrm{e}^{-\lambda t} + (at+b)\times(-\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda t} = g(t) \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda t}(-a\lambda t + a - \lambda b) = \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}$

Comme $\forall t \geqslant 0$, $\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t} \neq 0$, on en déduit que pour tout $t \geqslant 0$, $-at + a - b = t$ d'où $\begin{cases} -a\lambda = \lambda \\ a - \lambda b = 0 \end{cases}$ soit finalement $\begin{cases} a = -1 \\ b = -\dfrac{1}{\lambda} \end{cases}$.

Une primitive de $g : t \longmapsto \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est donc la fonction $\mathrm{G} : t \longmapsto \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ d'où $\mathrm{I}(x) = \mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(0) = \left(-x - \dfrac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda x} + \dfrac{1}{\lambda}$

Déterminons la limite en $+\infty$ de $\mathrm{I}(x) = -x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} + \dfrac{1}{\lambda}$.

$-x\mathrm{e}^{-\lambda x} = \dfrac{1}{\lambda} \times (-\lambda x)\mathrm{e}^{-\lambda x}$

On pose $\mathrm{Y} = -\lambda x$. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Y} = -\infty$ car $\lambda > 0$ et par théorème $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{Y}e^{\mathrm{Y}} = 0$ donc par composition des limites, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -x\mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$.

D'autre part, $\displaystyle\lim_{y\to-\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{Y}} = 0$ donc par composition, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$ d'où finalement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{I}(x) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Conclusion : $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\lambda}$.

4.3 Loi sans vieillissement

On dit que la durée de vie d'un composant électronique (par exemple) est sans vieillissement lorsque la probabilité qu'il fonctionne encore pendant une période h alors qu'il fonctionne à l'instant t, ne dépend pas de t.
Ainsi, $\mathrm{P}_{\mathrm{X}\geqslant t}(\mathrm{X} \geqslant t+h) = \mathrm{P}_{\mathrm{X}\geqslant 0}(\mathrm{X} \geqslant h)$ or sait que $\mathrm{P}_{\mathrm{X}\geqslant 0}(\mathrm{X} \geqslant h) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant h \text{ ET } \mathrm{X} \geqslant 0)}{\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 0)} = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant h)}{1} = \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant h)$

Définition — **Loi sans vieillissement**

Une variable aléatoire à valeurs positives X suit une loi sans vieillissement (ou sans mémoire) lorsque pour touts nombres positifs t et h, $\mathrm{P}_{\mathrm{X}\geqslant t}(\mathrm{X} \geqslant t+h) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant h)$ 13

Exemple 6. Par exemple, si la durée de vie X d'un composant électronique est sans vieillissement, la probabilité que sa durée de vie dépasse 7 ans sachant qu'il a déjà fonctionné 3 ans est $\mathrm{P}_{\mathrm{X}\geqslant 3}(\mathrm{X} \geqslant 7) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 4)$

Propriété — **La loi exponentielle est sans vieillissement**

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. La loi X est sans vieillissement.
Réciproquement, on admettra que toute variable aléatoire à densité sans vieillissement suit une loi exponentielle. 14

DÉMONSTRATION :
Il s'agit de démontrer que pour tous réels t et h positifs, $\mathrm{P}_{\mathrm{X}\geqslant t}(\mathrm{X} \geqslant t+h) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant h)$

$\mathrm{P}_{\mathrm{X}\geqslant t}(\mathrm{X} \geqslant t+h) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant t+h \text{ ET } \mathrm{X} \geqslant t)}{\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant t)} = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant t+h)}{\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant t)}$.

Mais X suit la loi exponentielle de paramètre λ donc $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant t+h) = \mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}$ et $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$

d'où $\dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant t+h)}{\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant t)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda t - \lambda h + \lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda h} = \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant h)$