تمرين1

ليكن a و b من $\mathbb{C}$ بحيث: $a \neq b$ و $|a| = |b| = 1$

بين أن : $(\forall z \in \mathbb{C}): \frac{z + ab\bar{z} - (a+b)}{a-b} \in iIR$

تمرين2

ليكن z و z′ عددين عقديين بحيث $|z| = |z'| = 1$ و $1 + zz' \neq 0$

بين أن العدد $u = \frac{z + z'}{1 + zz'}$ عدد حقيقي .

تمرين3

ليكن $z \in \not{C} - \{-i\}$ نضع $u = \frac{z(1+i) - i}{z+1}$.

1) حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون العدد u حقيقيا .

2) حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون العدد u تخيليا صرفا .

3) حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|u| = \sqrt{2}$.

تمرين4

احسب معيار وعمدة العدد $z = \frac{2(1+i)}{\sqrt{3} - i}$ واستنتج $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

تمرين5

نعتبر العددين $a = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4}$ و $b = \frac{\sqrt{3} - i}{4}$

اكتب a وb على الشكل المثلثي واستنتج معيار وعمدة كل من العددين : $z_1 = a + b$ و $z_2 = a - b$.

تمرين6

ليكن z و z′ عددين عقديين مختلفين .

بين أن $|z| = |z'| \Leftrightarrow (\frac{z + z'}{z - z'}) \in IR^-$

تمرين7

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^8 \bar{z}^{-3} = 1$.

تمرين8

نعتبر في $\not{C}$ المعادلة $(1 + iz)^n = (1 - iz)^n$ $(n \geq 2)$ (E)

1) a) بين أن كل حل z للمعادلة (E) يحقق $|1 + iz| = |1 - iz|$ واستنتج أن $z \in IR$

b) بين انه يوجد $\varphi \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ بحيث $z = tg\varphi$.

2) اكتب $\frac{1 + iz}{1 - iz}$ بدلالة $e^{i\varphi}$.

3) بين أن z حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان φ حلا للمعادلة $e^{i2n\varphi} = 1$ (E')

4) حل المعادلة (E′) واستنتج حل المعادلة (E)

تمرين9

نعتبر في $\not{C}$ الحدودية $P(z) = (z - i)^n - (i - \bar{z})^n$ $n \in IN^*$ ونعتبر النقط A(i) وM(z) و M′(z).

1) بين أنه إذا كان z حلا للمعادلة P(z)=0 فإن $AM = AM'$ ثم استنتج أن $z \in IR$.

2) حل في $\not{C}$ المعادلة P(z)=0 .

تمرين10

نعتبر النقط A(a) B(b) C(c) حيث $a,b,c\in\mathbb{C}$ و$|a|=|b|=|c|=1$.ولتكنH النقطة التي لحقها $a+b+c$.

1) تحقق أن الأعداد $(b+c)(\bar{b}-\bar{c})$ و $\frac{b+c}{b-c}$ تخيلية صرفا .

2) حدد لحق $\overrightarrow{AH}$ و$\overrightarrow{CB}$ واستنتج أن (AH) ارتفاع في المثلث (ABC) .

3) ماذا تمثل H بالنسبة للمثلث (ABC) .

تمرين11

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+(1+2i\sqrt{3})z-3=0$ واكتب حليها z_1 z_2 على الشكل المثلثي ($|z_1|<|z_2|$)

2) نعتبر النقطتين $A(z_1)$ و $B(z_2)$ حدد لحق النقطة C بحيث يكون المثلث (ABC) متساوي الساقين في A و$\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}=\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

تمرين12

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) $2z^2-(3\sqrt{3}-i)z+4=0$ ثم أكتب حليها z_1 و z_2 $(Im(z_2)<0)$ على الشكل المثلثي وتحقق أن $z_1^6+z_2^6+65=0$.

2) نعتبر النقط $A(\frac{\sqrt{3}+i}{2})$ ، $B(\sqrt{3}-i)$ ، $C(\sqrt{3}+i)$ و D(2i)

a) بين أن المثلث (OBC) متساوي أضلاع وأن A منتصف القطعة $[O,C]$

b) i) أحسب عمدة العدد $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}$ ii) بين أن (BD) واسط $[O,C]$

iii) حدد طبيعة الرباعي (OBCD) .

تمرين13

a عدد حقيقي موجب قطعا بحيث $a\neq 1$ ونعتبر المعادلة

$$(E)\ 2z^2+(a+1)(1-i\sqrt{3})z+(-a)(1+i\sqrt{3})=0$$

a) أحسب $-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})^2$ ثم حل المعادلة (E) واكتب حليها على الشكل المثلثي .

b) اكتب الجذور الرابعة لحلي المعادلة (E) على الشكل المثلثي

تمرين14 ليكن $\alpha\in[0,\pi[$ احسب معياروعمدة كل من العددين

$$z_1=\frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1-\cos\alpha-i\sin\alpha} \quad \text{و .} \quad z_2=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha-i}{\cos\alpha+i\sin\alpha+i}$$

تمرين15

ليكن (D) المستقيم المار من $\Omega(\omega)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(a)$ حيث $a\in\mathbb{C}^*$ $\omega\in\mathbb{C}$ ولتكن $M(z)$ و $M(z')$ من المكستنوى (P) .

بين أن : $S_{(D)}(M)=M'\Leftrightarrow z'=e^{2i\arg(a)}\overline{(z-\omega)}+\omega$

تمرين16

ليكن $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ حدد معيار وعمدة حلي المعادلة $z^2-2z+1+\cos(2\alpha)-i\sin(2\alpha)=0$.

تمرين17

نعتبر المعادلة $z^2+\alpha(\alpha+i)z+i\alpha^3=0$ حيث α عدد عقدي .

1) حل في المعدلة .

2) حدد بدلالة معيار وعمدة α معيار وعمدة حلي المعادلة

3) حدد α بحيث يكون جذري المعادلة مترافقين.

4) حدد α بحيث يكون جداء جذري المعادلة تخيلي صرف .

تمرين18

ليكن n عدد طبيعي بحيث $n \geq 2$

1) حدد على الشكل المثلثي الجذور النونية لكل من $u=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ و $v=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^{2n} - z^n + 1 = 0$ (1) .

3) a) ليكن $\theta \neq 2k\pi$ بين أن $\frac{\cos\theta + i\sin\theta + 1}{\cos\theta + i\sin\theta - 1} = -i\tan\frac{\theta}{2}$

b) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(\frac{z-1}{z+1})^n + (\frac{z+1}{z-1})^n = 1$ (2)

c) نعتبر A(1) . بين أن مجموعة صور حلول المعادلة (2) هي تقاطع المستقيمات (AM) مع محور الأراتيب .حيث M تنتمي إلى مجموعة صور الجذور النونية للعددين u و v .

تمرين19

نعتبر النقط A(a) B(b) C(c) حيث $a,b,c \in \mathbb{C}$

1) بين أنه يكون المثلث (ABC) متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كان :

$a + bj + cj^2 = 0$ أو $a + cj + bj^2 = 0$

2) استنتج قيم العدد z التي تكون من أجلها النقط $M(az^2)$ و $N(a^2z)$ و $P(z^3)$ رؤوس مثلث متساوي أضلاع .

تمرين20

لكل عدد عقدي $z \neq 1$ نضع $f(z) = \frac{iz^2}{z-1}$

1) حدد المجموعة $E = \{M(z) \in P \,/\, f(z) \in iIR^*\}$

2) a) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\bar{z}^3 = -1$

b) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(\frac{1}{\bar{z}}) = \overline{f(z)}$

3) a) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E) : \sqrt{3}f(z) = 1$ وأكتب الحلين z' و z'' على الشكل المثلثي $(|z'| = 1)$.

b) أحسب z'^{2001}

c) نعتبر النقط $A(1)$ $B(z')$ و $C(z'')$ و $D(z'z'')$.

بين أن $CD = \frac{\sqrt{3}}{3}AB$ وحدد القياس الرئيسي لـ $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}})$

d) ما هي طبيعة المثلث (OCD) ؟

4) نضع $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ مع $]-\pi, 0[$

a) حدد معيار وعمدة $f(z)$.

b) حدد z بحيث يكون $(f(z))^3 = |f(z)|^3$

تمرين21

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. نضع $\omega = e^{i\frac{\pi}{4}}$

ونعتبر النقط $A(\omega)$ و $B(\bar{\omega})$.

نربط كل نقطة $M(z) \neq B$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث $z' = \frac{\omega\bar{z}}{\bar{z} - \omega}$

1) بين أن $z' \in iIR \Leftrightarrow |z|^2 = \sqrt{2}.Ré(z)$.

2) a) تحقق أن $z' - \omega = \frac{-i}{\bar{z} - \omega}$.

b) نضع $|z - \bar{\omega}| = r$ و $\arg(z - \bar{\omega}) \equiv \theta [2\pi]$.

أحسب $|z' - \omega|$ بدلالة r و $\arg(z' - \omega)$ بدلالة θ .

3) حدد وانشئ كل من المجموعات التالية :

a) $(\Gamma)=\{M(z)\in(P)\ /\ z'\in iIR\}$

b) $(C)=\{M(z)\in(P)\ /\ |z'-\omega|=1\}$

c) $(D)=\left\{M(z)\in(P)\ /\ \arg(z'-\omega)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]\right\}$.

4) لتكن $M_0(z_0)$ نقطة تقاطع (C) و (D) .

أكتب الشكل المثلثي للعدد z'_0 لحق النقطة M'_0 ثم استنتج الشكل المثلثي للعدد z_0 .

تمرين22

نعتبرالتطبيق f المعرف بما يلي :

$$f\ :\ P-\{O\}\to P$$
$$M(z)\to M'(z')\quad /\quad z'=\frac{(1+i)z-i}{z}$$

1) حدد النقط الصامدة بالتطبيق f .

2) نعتبر النقط $A(1)$ و $B(i)$

a) بين أن لكل M من $P-\{A,B\}$ لدينا : $\frac{AM}{BM}=\frac{AM'}{BM'}$

وأن $(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B})\equiv(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})+\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

b) حدد صورة المستقيم (AB) .

3) حدد الجموعة : $\Gamma=\left\{M(z)\ /\ \arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]\right\}$

تمرين23

نعتبرالنقطتين $A(i)$ و $B(-i)$ والتطبيقين f و F المعرفين بما يلي :

$$f\ :\ \mathbb{C}-\{-i\}\to\mathbb{C}$$
$$z\ \to\frac{iz+1}{z+i}$$

و

$$F\ :P-\{B\}\to P$$
$$M(z)\to M'(f(z))$$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3f(z^3)=i$ (أعط الحلول على الشكل المثلثي)

2) نضع $z=e^{i\theta}$ مع $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ حدد معيار وعمدة $f(z)$

3) بين أنه إذاكانت M تنتمي إلى محور الأفاصيل فإن M’ تنتمي إلى دائرة يجب تحديدها.

4) a) بين أن : $f(z)-i=\frac{2}{z+i}$

b) حدد صورة الدائرة (Γ) التي مركزها B وشعاعها 1.

c) حدد صورة النصف المستقيم (D) الذي أصله B ويكون زاوية قيسها $\frac{\pi}{4}$ مع $\vec{e}_1$

5) a) بين أن : $(\forall z\neq -i):|f(z)-i|=|f(z)-1|\Leftrightarrow|z-1|=\sqrt{2}$

b) حدد صورة الدائرة (Γ') التي مركزها $C(1)$ وشعاعها $\sqrt{2}$.

6) a) بين أن : $f(z)=\frac{i(z-i)}{z+i}$

b) استنتج أن : $OM'=\frac{AM}{BM}$ و $(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM'})\equiv(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})+\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

c) حدد صورة الدائرة (C) التي قطرها $[AB]$.

تمرين24

نعتبر النقط $A(i)$ و $B(1)$. لكل عدد عقدي $z \neq i$ نضع $z' = \dfrac{\bar{z} - i}{\bar{z} + i}$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z' = \bar{z}$ (المجهول هو z) ثم أكتب حليها على الشكل المثلثي .

2) a) حدد المجموعة $E = \{M(z) \in P \ / \ z' \in IR\}$

b) حدد المجموعة $F = \{M(z) \in P \ / \ z' \in iIR\}$

3) نعتبر النقطتين $M(z)$ و $M'(z')$

a) بين أن $AM.BM' = 2$. b) حدد قياسا للزاوية $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM'}})$

4) ليكن z_1 حل المعادلة $z' = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ولتكن M_1 صورة z_1

بين أن المثلث (ACM_1) متساوي الأضلاع مع $C(-i)$.

5) a) بين أن : $(\forall z \neq i) : |z - 1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z' + i| = |z' - 1|$

b) استنتج المجموعة $G = \{M(z) \in P \ / \ |z' + i| = |z' - 1|\}$

6) a) بين أن : $(\forall z \neq i) : z \in IR \Leftrightarrow |z'| = 1$.

b) استنتج $H = \{M(z) \in P \ / \ |z'| = 1\}$

7) نضع $z - i = re^{i\theta}$. a) حدد الشكل المثلثي للعدد $z' - 1$.

b) استنتج $K = \left\{M'(z') \in P \ / \ \arg(z - i) \equiv \dfrac{\pi}{4} [2\pi]\right\}$