LES NOMBRES COMPLEXES : FORME ALGÉBRIQUE

I – L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes :

1) Forme algébrique d'un nombre complexe.

a. Introduction :

L'équation $x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
Imaginons un nombre i dont le carré est égal à -1 ; on a alors : $x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = \mathrm{i}^2$
et cette équation admet au moins une solution, le nombre imaginaire i.
D'où l'idée de construire un nouvel ensemble, appelé ensemble des nombres complexes, contenant ce nombre i, et dans lequel l'équation précédente admettra au moins une solution.

b. Définitions : Soit i le nombre « imaginaire » tel que $\boxed{\mathrm{i}^2=-1}$.

L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est l'ensemble des nombres z de la forme $\boxed{z = a + b\mathrm{i}, \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}}$. On note aussi $z = a + \mathrm{i}b$

- L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = a + b\mathrm{i} = a + \mathrm{i}b$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$) est appelée **forme algébrique** de z .
- On dit que a est **la partie réelle** de z et l'on note $a = \mathrm{Re}(z)$.
- On dit que b est **la partie imaginaire** de z et l'on note $b = \mathrm{Im}(z)$.

exemples : $5 + 2\mathrm{i}$; $3-4\mathrm{i}$; $\sqrt{2} + \mathrm{i}$; $-1{,}75$; $2{,}4\,\mathrm{i}$ sont des nombres complexes.

Remarque : L'ensemble des nombres réels est inclus dans celui des nombres complexes $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

c. Propriétés :

- Soit z un nombre complexe.
  Dire que z est **réel** équivaut à dire que $\mathrm{Im}(z)=0$ **.**
  Dire que z est **imaginaire pur** équivaut à dire que $\mathrm{Re}(z)=0$.
- Deux nombres complexes sont **égaux** si et seulement si
  ils ont la **même partie réelle** et la **même partie imaginaire** : $a+b\mathrm{i}=a'+b'\mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$
- Un nombre complexe est **nul** si et seulement si
  sa **partie réelle** et sa **partie imaginaire** sont **nulles** : $a+b\mathrm{i}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$

2) Règles de calculs dans $\mathbb{C}$:

On définit dans $\mathbb{C}$ une addition et une multiplication pour lesquelles les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$, avec $\mathrm{i}^2 = -1$.

Exemples : somme $(5+2\mathrm{i})+(3-4\mathrm{i})=$
produit $(5+2\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})=$

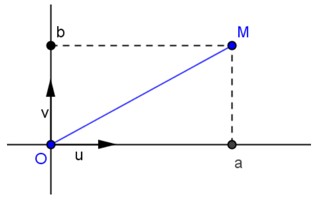
En particulier, les identités remarquables connues pour les réels restent valables dans $\mathbb{C}$.

Exemples : $(5+2\mathrm{i})^2=$
$(2-\mathrm{i})^2=$
$(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})=$

3) <u>Représentation géométrique d'un nombre complexe :</u>

a. Représentation géométrique : Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$

- Tout point M de coordonnées (a ; b) représente le nombre complexe $a+b\mathrm{i}$.
- Tout nombre complexe $a+b\mathrm{i}$ ($a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$) est représenté par le point M de coordonnées (a ; b).



b. **Définitions** :

- Le nombre complexe $z = a+b\mathrm{i}$ est **l'affixe du point** M(a ; b) ou encore **l'affixe du vecteur** $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$. On écrit $a+b\mathrm{i} = z_{\mathrm{M}} = z_{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}$ ou M($a+b\mathrm{i}$).
- Le point M(a ; b) est **l'image** du nombre complexe $a+b\mathrm{i}$. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ est **le vecteur image** de $a+b\mathrm{i}$.
- Tout point de **l'axe des abscisses** est l'image d'un nombre complexe de la forme $a + 0 \times \mathrm{i} = a$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ainsi, cet axe est appelé **axe des réels**.
- Tout point de **l'axe des ordonnées** est l'image d'un nombre complexe de la forme $0 + b \times \mathrm{i} = b\mathrm{i}$ avec $b \in \mathbb{R}$. Ainsi, cet axe est appelé **axe des imaginaires purs.**
- Le plan muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$ utilisé pour la représentation des nombres complexes est appelé **plan complexe**.
- Soit M le point d'affixe $z = a+b\mathrm{i}$. La distance OM est appelée **module de z**. On note $|z| = \mathrm{OM}$. Ainsi, $|z|^2 = a^2+b^2$, d'où : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

4) <u>Conjugué d'un nombre complexe :</u>

a. Définition : On appelle **conjugué** du nombre complexe $z = a+b\mathrm{i}$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$), le nombre complexe noté $\bar{z}$, égal à $a-b\mathrm{i}$.

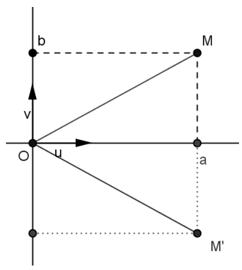
Exemples : $\overline{5+3\mathrm{i}} =$ $\qquad$ $\overline{2-\mathrm{i}} =$

b. Propriétés :

- Soit le nombre complexe $z = a+b\mathrm{i}$. On a $z\bar{z} =$
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, le nombre $z\bar{z}$ est . . . .

c. Représentation géométrique du conjugué :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$, le point M' d'affixe $\bar{z} = a-b\mathrm{i}$ est le symétrique du point M d'affixe $z = a+b\mathrm{i}$ par rapport à l'axe des réels.



5) <u>Inverse d'un nombre complexe non nul :</u>

Définition : Soit z un nombre complexe non nul. **L'inverse** de $z = a+b\mathrm{i}$ est $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+b\mathrm{i}}$.

Règle de calcul : Pour écrire l'inverse d'un nombre complexe non nul sous forme algébrique, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemples : $z_1 = -3+2\mathrm{i}$ $\qquad \dfrac{1}{z_1} =$

$z_2 = 1-\mathrm{i}$ $\qquad \dfrac{1}{z_2} =$

6) Quotient de deux nombres complexes :

Règle de calcul : Pour écrire le quotient de deux nombres complexes sous forme algébrique, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemple : $z_3 = -1+4\mathrm{i}$ et $z_4 = 3+\mathrm{i}$; $\dfrac{z_3}{z_4} = \dfrac{-1+4\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} =$

7) Propriétés du conjugué : *Démonstrations à savoir faire*

Propriétés : Soient z et z' deux nombres complexes.

- Le conjugué de $\bar{z}$ est égal à … ou encore $\overline{\left(\bar{z}\right)} =$ …
- $z + \bar{z} =$
- $z - \bar{z} =$
- $z = \bar{z}$ équivaut à
- $z = -\bar{z}$ équivaut à
- Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués : $\overline{z+z'} =$
- Le conjugué d'un produit est le produit des conjugués : $\overline{zz'} =$
- Plus généralement, $\overline{(nz)} =$ et $\overline{\left(z^n\right)} =$ ($n \in \mathbb{N}$)
- Le conjugué de l'inverse est l'inverse du conjugué : $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} =$ ($z \neq 0$)
- Le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués : $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} =$ ($z' \neq 0$)

II – Équations du second degré à coefficients réels :

1) **Définition :**

On appelle **équation du second degré à coefficients réels** toute équation qui peut s'écrire sous la forme $aX^2 + bX + c = 0$ où X est l'inconnue, avec a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation, c'est trouver tous les complexes z tels que $az^2 + bz + c = 0$.

2) Résolution :

Théorème L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b, c réels ; $a \neq 0$) admet toujours des solutions dans $\mathbb{C}$.

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** de l'équation ($\Delta \in \mathbb{C}$).

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions **réelles** distinctes : $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution réelle : $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions **complexes conjuguées** :

$$z_1 = \frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 3 = 0$

Remarque : Dans $\mathbb{C}$, le trinôme $az^2 + bz + c$ ($a \neq 0$) se factorise toujours sous la forme $a(z-z_1)(z-z_2)$, z_1 et z_2 étant réels, distincts ou non, ou complexes conjugués.