Mathématiques générales

9 février 2007

Table des matières

I Compléments d'algèbre linéaire **2**

1 Notions de base sur la réduction des endomorphismes **2**

Première partie

Compléments d'algèbre linéaire

Dans tout ce chapitre, E est un espace vectoriel de dimension fine $n \geq 1$ sur un corps (commutatif) $\mathbb{K}$.

1 Notions de base sur la réduction des endomorphismes

Soit $u : E \to E$ un endomorphisme.

Définition (vecteur propre) Sit $\lambda \in \mathbb{K}$.
On dit qu'un vecteur x de E est un vecteur propre pour u associé à λ si :

$$u(x) = \lambda x \text{ et } x \neq 0_E$$

Définition (sous-espace propre) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$E_\lambda := \{x \in E \,|\, u(x) = \lambda x\}$$

s'appelle le sous-espace propre associé à λ.

Définition (valeur propre) Si $E_\lambda \neq \{0_E\}$, on dit que λ est une valeur propre de u.

Définition (spectre) L'ensemble des valeurs propres de u s'appelle le spectre de u. On le note $\mathrm{Sp}\ u$.

Quelques propriétés

1. Si u est un endomorphisme de E, on peut définir son polynôme caractéristique :
$$\chi_u = \det(X\ \mathrm{id} - u)$$
C'est un polynôme unitaire de degré $n = \dim E$. On a $\lambda \in \mathrm{Sp}\ u \Leftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0$.
2. $\mathrm{Sp}\ u$ est fini de cardinal inférieur ou égal à n.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $\mathrm{Sp}\ u \neq \emptyset$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\dim E$ impaire, alors $\mathrm{Sp}\ u \neq \emptyset$.

4. Si la matrice de u dans une certaine base $\mathcal{B}$ est triangulaire,

$$Mat_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   alors Sp $u = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.
   Attention : les λ_i ne sont pas forcément deux à deux distinct.
   Le polynôme caractéristique χ_u est alors scindé.
   Réciproquement, si u est un endomorphisme de E avec χ_u scindé, alors u est trigonalisable.

5. Soit Sp $u = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ deux à deux distincts. Soient $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_r}$ les sous-espaces propres de u.
   Alors la somme de $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_r}$ est directe.

6. Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent, et soit E_λ le sous-espace propre de u associé à λ.
   Alors E_λ est stable par v.
   En particulier, Ker $u = E_0$ est stable par v.
   On montre également que Im u est stable par v.

Index

sous-espace propre, 2
spectre, 2

valeur propre, 2
vecteur propre, 2