Loi normale, événements indépendants, loi binomiale, estimation d'une moyenne par intervalle de confiance

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Une usine fabrique de grandes quantités d'un certain type de pièces mécaniques dont les dimensions théoriques sont 65 mm pour la longueur et 10 mm pour la largeur.

Dans ce qui suit, tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

1° *Loi normale*

Une pièce de ce type a une largeur acceptable lorsque celle-ci, exprimée en millimètres, est comprise entre 9 et 11 millimètres.

On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce choisie au hasard dans la production d'une journée, associe sa largeur.

On suppose que L suit la loi normale de moyenne 10 et d'écart type 0,5.

Déterminer la probabilité qu'une pièce ait une largeur acceptable.

2° *Événements indépendants*

On note A l'événement : « une pièce prélevée au hasard dans un stock important présente un défaut de résistance à la torsion ».

On note B l'événement : « une pièce prélevée au hasard dans le stock présente un défaut de longueur ».

On admet que les probabilités des événements A et B sont $P(A) = 0{,}03$ et $P(B) = 0{,}02$ et on suppose que ces deux événements sont indépendants.

Calculer la valeur exacte de la probabilité de chacun des événements suivants :

a) E_1 : « une pièce prélevée au hasard dans le stock présente les deux défauts » ;

b) E_2 : « une pièce prélevée au hasard dans le stock présente au moins un des deux défauts » ;

c) E_3 : « une pièce prélevée au hasard dans le stock ne présente aucun des deux défauts ».

3° *Loi binomiale*

Dans une grosse livraison destinée à l'exportation on prélève au hasard 40 pièces pour vérification. La livraison est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 40 pièces.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini de 40 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses de ce prélèvement.

Dans cette question, on prend 0,05 comme valeur de la probabilité de l'événement : « une pièce choisie au hasard dans la livraison est défectueuse ».

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.

b) On approche la loi binomiale par une loi de Poisson de même espérance mathématique.

Déterminer le paramètre λ de cette loi.

c) On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ a la valeur obtenue en **b)**.

En utilisant la loi de Poisson, déterminer la probabilité de l'événement :

F : « le prélèvement contient au plus deux pièces défectueuses ».

4° *Estimation d'une moyenne par intervalle de confiance*

Dans cette question on s'intéresse à la longueur des pièces.

On mesure la longueur de chacune des 50 pièces d'un échantillon prélevé au hasard et avec remise dans une grosse commande.

On constate que les valeurs approchées arrondies à 10^{-3} de la moyenne $\bar{x}$ et de l'écart type s des longueurs, en millimètres, de cet échantillon sont :

$\bar{x} = 64{,}715$ et $s = 0{,}095$.

a) À partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle de la moyenne μ et de l'écart type σ de la longueur des pièces de l'ensemble de la commande.

b) Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 pièces prélevées au hasard et avec remise dans la commande, associe la moyenne des longueurs des pièces de cet échantillon.

On suppose que $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{50}}$, et on prend pour valeur de σ l'esti-mation ponctuelle obtenue à la question **4° a)**.

Déterminer un intervalle de confiance centré en $\bar{x}$ de la moyenne μ des longueurs des pièces de la commande, avec le coefficient de confiance 95 %.

c) On considère l'affirmation suivante : « la moyenne μ des longueurs des pièces de la commande appartient obligatoirement à l'intervalle obtenu à la question **4° b)** ».

Peut-on déduire de ce qui précède qu'elle est vraie ?

Correction.

1°) Loi normale $\qquad 9 \leq L \leq 11$ (mm)

$L \rightsquigarrow \mathcal{N}(10, 0{,}5)$

$P(9 \leq L \leq 11)$

$= P\left(\frac{9-10}{0{,}5} \leq \frac{L-10}{0{,}5} \leq \frac{11-10}{0{,}5}\right) \qquad T = \frac{L-10}{0{,}5}$ et $T \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$

$= P(-2 \leq T \leq 2) = 2\Pi(2) - 1 = 2 \times 0{,}9772 - 1 = \underline{0{,}954}$

2°) Évènements indépendants. $\qquad$ A : défaut de résistance

$P(A) = 0{,}03$ et $P(B) = 0{,}02$ $\qquad$ B : défaut de longueur

A et B sont deux évènements indépendants donc

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ donc $P(A \cap B) = 0{,}03 \times 0{,}02 = 6 \times 10^{-4}$

a) $P(E_1) = P(A \cap B) = \underline{6 \times 10^{-4}}$

b) $P(E_2) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \underline{0{,}049}$

c) $P(E_3) = 1 - P(E_2) = 1 - 0{,}049 = \underline{0{,}951}$

3°) Loi binomiale

a) • expériences identiques et indépendantes (40)

• chaque expérience a deux issues : pièce défectueuse ou non. $\qquad X \rightsquigarrow \mathcal{B}(40; 0{,}05)$

b) $\mathcal{B}(40, 0{,}05) \rightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = 40 \times 0{,}05 = 2$

c) $P(F \leq 2) = P(F=0) + P(F=1) + P(F=2)$ avec $F \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$

$= \underline{0{,}677}$

4°) échantillon de 50 pièces : $\bar{x} = 64{,}715$ et $s = 0{,}095$ (à 10^{-3})

a) estimation ponctuelle : $\mu = \bar{x} = \underline{64{,}715}$

$\sigma = s\sqrt{\frac{n}{n-1}} = 0{,}095 \times \sqrt{\frac{50}{49}} = \underline{0{,}096}$

b) $\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{50}}\right)$

Intervalle de confiance à 95%.

$$\left[\bar{x} - 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{50}} \;;\; \bar{x} + 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{50}}\right]$$

$$= \underline{[64,688 \;;\; 64,742]}$$

c) non, car on a un risque de 5%.