Chapitre 2 LIMITES

I) LIMITE EN $+\infty$ D'UNE FONCTION

A) Limite finie en $+\infty$

Soit L un nombre réel.
Dire que f admet une **limite L** lorsque x tend vers $+\infty$ signifie que :
Tout intervalle ouvert contenant L contient aussi toutes les valeurs de f(x) pour tout x assez grand.
On écrit : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f = L$

La droite y = L est **asymptote horizontale** à la courbe C_f en $+\infty$.

B) Limite infinie en $+\infty$

Dire que f **tend vers $+\infty$** lorsque x tend vers $+\infty$ signifie que :
Tout intervalle ouvert de la forme]A , $+\infty$ [contient toutes les valeurs de f(x) pour tous les réels x assez grand.

On écrit : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f = +\infty$

C) Asymptote oblique

Soit f une fonction définie sur un intervalle I =]r ; $+\infty$ [et a et b deux réels donnés.
Si , pour tout x $\in$ I , on a : f(x) = ax + b + g(x) et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = 0$

Alors la droite d'équation y = ax + b est **asymptote oblique** à C_f en $+\infty$

II) LIMITE EN $-\infty$ D'UNE FONCTION

On définit de la même manière la limite de la fonction f en $-\infty$.

A) Limite finie en $-\infty$

Soit L un nombre réel.
Si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de f(x) pour (- x) assez grand, on dit que la fonction f a pour limite L quand x tend vers $-\infty$.

On écrira $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = L$.

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation y = L est une **asymptote horizontale** à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$.

B) Limite infinie en $+\infty$

Si tout intervalle de la forme] A ; $+\infty$ [contient toutes les valeurs de f(x) pour x assez grand négatif, on dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

On écrira $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.

Si tout intervalle de la forme]$-\infty$; A[contient toutes les valeurs f(x) pour x assez grand négatif, on dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

On écrira $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

Méthode

- Si $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} [\, f(x) - (ax + b)] = 0$ *(ou $\lim\limits_{x \to -\infty} [\, f(x) - (ax + b)] = 0$)* , alors la courbe C_f admet la droite d'équation : y = ax + b comme asymptote oblique en $+\infty$ *(ou en $-\infty$)*.

III) LIMITE EN UN POINT D'UNE FONCTION

A) Limite infinie en un point a

Soit L un nombre réel.
Dire que f **tend vers $+\infty$** lorsque x tend vers a signifie que tout intervalle ouvert de la forme]A , $+\infty$ [contient toutes les valeurs de f(x) pour tout x assez proche de a.

On écrit : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f = +\infty$

La droite d'équation x = a est **asymptote verticale** à la courbe C_f

B) Limite finie en un point a

Soit L un nombre réel.
Dire que f admet **une limite L** lorsque x tend vers a signifie que tout intervalle ouvert contenant L contient aussi toutes les valeurs de f(x) pour tout x assez proche de a.

On écrit : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x \to a} f = L$

IV) LIMITES ET OPERATIONS

A) Opérations sur les limites

Limite d'une somme

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors f + g a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	pas de résultat général

limite d'un produit

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors f x g a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	pas de résultat général

limite d'un inverse

Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0 par valeurs supérieures	0 par valeurs inférieures	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{1}{f}$ a pour limite	$\frac{1}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0

limite d'un quotient

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures	0	0 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	pas de résultat général	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	pas de résultat général

les formes indéterminées sont de la forme : $\infty - \infty$; $\infty \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$

Dans certains cas , on peut lever l'indétermination à l'aide des méthodes qui suivent.

B) Composées de fonctions

Propriété 1

Soit f = g o h une fonction composée de deux fonctions g et h .
Si $\lim\limits_{x \to a} h = b$ et si $\lim\limits_{x \to b} g = c$ alors : $\lim\limits_{x \to a} g \circ h = c$.

Cette propriété s'applique encore si a, b , c sont remplacées par $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple

a) Soit f définie sur IR par $f(x) = \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) Sachant que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x}$

V) THEOREMES DE COMPARAISON

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $a \in$ I.

Propriété 1 :

Soit f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L'$.
Si $f \leq g$ alors $L \leq L'$

Propriété 2 : Théorème des gendarmes

Soit g et h deux fonctions telles que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L$.
Si $g \leq f \leq h$ alors $\lim\limits_{x \to a} = L$.

Démonstration dans le cas ou $a = +\infty$

Propriété 3

Soit g une fonction tel que $\lim\limits_{x \to a} g = +\infty$. Si $g \leq f$ alors $\lim\limits_{x \to a} f = +\infty$

Soit g une fonction tel que $\lim\limits_{x \to a} g = -\infty$. Si $f \leq g$ alors $\lim\limits_{x \to a} f = -\infty$

Les théorèmes de comparaisons et le théorème des gendarmes restent valables lorsque a est un réel , vaut $+\infty$ ou $-\infty$.

VI) EN RESUME

Méthodes pour calculer une limite

1) On applique les **théorèmes sur les opérations** sur les limites
2) On peut utiliser un **changement de variable** : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a + h)$
3) On utilise un **théorème de comparaison**.
4) On peut **conjecturer** la limite ℓ de f et montrer que $\lim\limits_{x \to a} | f(x) - \ell | = 0$

Des techniques permettent de lever certaines formes indéterminées.

- Mise en facteur du terme « le plus fort »
- Technique de la quantité conjuquée.
- On fait apparaître le taux de variation $\frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0}$.

TRAVAUX DIRIGES

TD n°1 : Utiliser une calculatrice ou un tableur pour conjecturer la limite d'une fonction

1) Méthode graphique

- On entre la fonction dans l 'éditeur de fonction
- On règle la fenêtre graphique au voisinage de a
- On observe le comportement de la fonction au voisinage de a
- On fait une hypothèse sur la limite de la fonction
- On démontre le résultat

a) Conjecturer à l'aide d'une calculatrice

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

b) Conjecturer à l'aide d'une calculatrice

$$\lim_{x \mapsto +\infty} (x^2 + \sin x)$$

2) Méthode numérique

- On entre la fonction dans l'éditeur
- On règle la table au voisinage de a en choisissant un pas.
- On observe le comportement de la fonction au voisinage de a
- On fait une hypothèse sur la limite de la fonction
- On démontre le résultat

a) Conjecturer à l'aide d'une calculatrice

$$\lim_{x \to 1} \frac{x + \sin x}{\sqrt{x} - 1}$$

b) Conjecturer à l'aide d'une calculatrice

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x + \sin x}{\sqrt{x} - 1}$$

c) Conjecturer à l'aide d'une calculatrice

$$\lim_{x \mapsto +\infty} (x^4 - 100\,000x^3)$$

3) Etudier dans chaque cas les propriétés demandés pour la fonction et pour la suite.
(On pourra s'aider d'une calculatrice pour observer le comportement de la fonction et de la suite associée)

a) $f(x) = \sin x$ $\quad u_n = \sin n$
la fonction est-elle périodique ?
la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle périodique ?

b) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{2x - 3}$ $\quad u_n = \dfrac{2n + 3}{2n - 3}$
la fonction f est-elle bornée ?
la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle bornée ?

c) $f(x) = \tan(\pi x)$ $\quad u_n = \tan(\pi n)$
Etudier $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi x)$ et $u_n = \dfrac{1}{n}\sin(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi)$
la fonction f est-elle monotone ?
la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle monotone ?

TD n°2 : Rechercher des fonctions vérifiant certaines conditions

Pour chacun des cas, déterminer deux fonctions vérifiant les conditions suivantes :

a) f est paire , $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$ et $f(2) = 3$

b) $f(0) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 2$

c) la courbe C de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 1$

d) la courbe C de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$ et une asymptote oblique d'équation $y = x$

e) la courbe C de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$, une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ et une asymptote oblique d'équation $y = x$

TD n°3 : Démontrer une limite à l'aide de la définition

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 + x^2$

1°) Donner les valeurs de f(1) ; f(10) : f(100) ; f(5812).
2°) Observer la représentation graphique de f donnée par une calculatrice ou un ordinateur.
Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de f en $+\infty$?
3°) On considère l'intervalle $]100 ; +\infty[$. Démontrer que pour $x > 10$, $f(x) \in]100 ; +\infty[$.
4°) On considère un intervalle $]A ; +\infty[$, avec $A > 0$.
Montrer que pour x supérieur à $\sqrt{A}$, tous les f(x) appartiennent à l'intervalle $]A ; +\infty[$.

Définition : Dire que f **tend vers** $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]A , +\infty[$ contient toutes les valeurs de f(x) pour tout x assez grand.
On écrit : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f = +\infty$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x^2}$.

1°) Donner des valeurs approchées à 10^{-3} près de f(1) ; f(10) : f(100) ; f(3234).
2°) Observer la représentation graphique de f donnée par une calculatrice ou un ordinateur.
Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de f en $+\infty$?
3°) On considère l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon 0,01 , c'est-à-dire $]1,99 ; 2,01[$.
Démontrer que pour $x > 10$, $f(x) \in]1,99 ; 2,01[$.
4°) On considère l'intervalle $]2 - r ; 2 + r[$ avec $r > 0$. Montrer que pour x supérieur à un certain x_0 à déterminer en fonction de r, tous les f(x) appartiennent à l'intervalle $]2 - r ; 2 + r[$.

5°) Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

Définition : Soit ℓ un nombre réel.
Dire que f admet une **limite ℓ** lorsque x tend vers $+\infty$ signifie que pour tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi toutes les valeurs de f(x) pour tout x assez grand.
On écrit : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f = \ell$