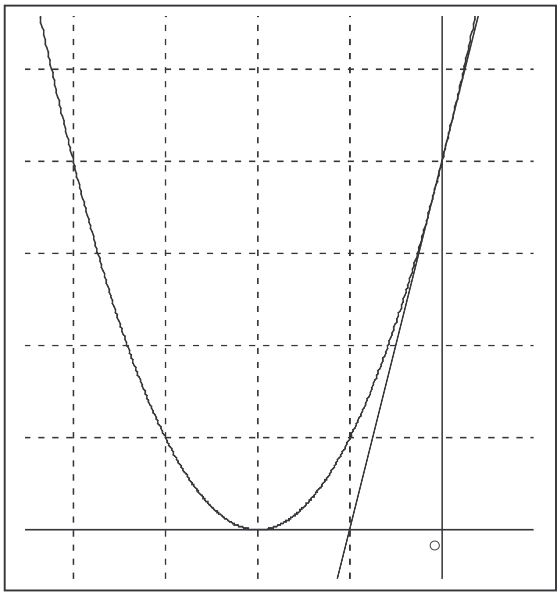
SUPER ENTRAINEMENT AU DST DU 16 DECEMBRE 2008

EXERCICE 1 : *« La tangente a plus de puissance que la sécante » (V. HUGO)*

On a représenté ci-contre la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur R ainsi que sa tangente T en $x = 0$.
La courbe admet l'axe (Ox) pour tangente en $x = -2$.



1. *Répondre en utilisant uniquement le graphique ci-contre* :
a. Déterminer le nombre dérivé de f en $x = -2$.
b. Déterminer $f'(0)$.
c. Déterminer l'équation de T.
d. Déterminer l'approximation affine $g(x)$ de la fonction f en 0.

2. La fonction f tracée ci-contre est définie par $f(x) = (x+2)^2$.
a. Retrouver par le calcul le nombre dérivé de f en 0.
b. En déduire l'approximation affine de $(2+h)^2$ en 0.
~~**c.** Démontrer que l'erreur $e(h)$ commise est $e(h) = h^2$~~.
d. En déduire une valeur approchée de $1{,}98^2$ ainsi que l'erreur commise.
e. Retrouver l'équation de T par le calcul.

EXERCICE 2 : *« Sans technique, un don n'est qu'une sale manie » (G. Brassens)*

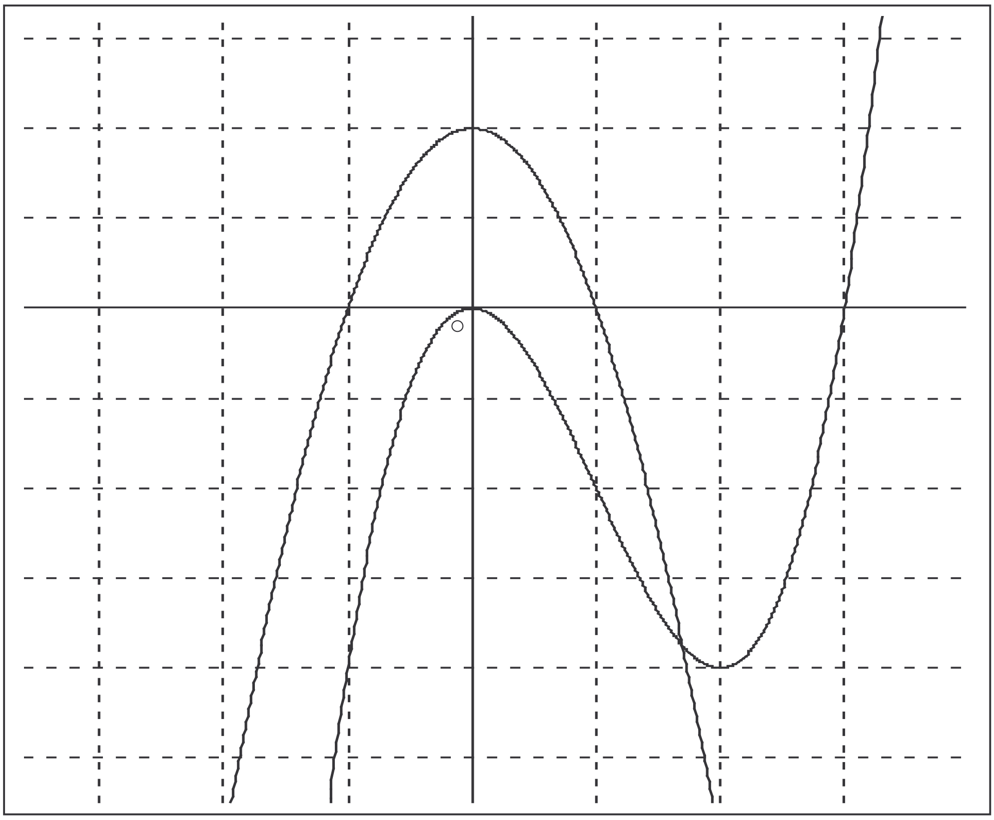
1. On considère la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x}$.

a. Déterminer le nombre dérivé de f en 1.
b. Déterminer l'ensemble des valeurs sur lequel f est dérivable et démontrer que pour tout nombre a de cet ensemble $f'(a) = \dfrac{-2}{a^2}$.
***c.** Soient A et B deux points distincts de la courbe de f d'abscisses respectives a et b.
A quelle condition sur a et b les tangentes en A et en B à la courbe de f sont-elles parallèles ?

2. On considère la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

a. Déterminer le nombre dérivé de f en 0.
b. Etudier la dérivabilité de f en -1 et préciser la tangente à la courbe en ce point.
c. Déterminer l'ensemble des valeurs sur lequel f est dérivable et démontrer que pour tout nombre a de cet ensemble $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+a}}$.

EXERCICE 3 : *« Je suis l'équation triste au bas d'une inconnue » (L. Ferré)*



1. On considère la fonction définie sur R par $f(x) = 2 - 2x^2$ dont on a tracé la courbe ci-dessus.

a. Déterminer l'ensemble des valeurs sur lequel *f* est dérivable et démontrer que pour tout nombre *a* de cet ensemble $f'(a) = -4a$.

b. La courbe de *f* admet-elle des tangentes horizontale ? Si oui en quel(s) point(s) ?

c. Tracer les tangente à la courbe de la fonction *f* en *x = -1* et *x = 1.*

2. On considère la fonction définie sur R par $g(x) = x^3 - 3x^2$ dont on a tracé la courbe ci-dessus.

a. Déterminer l'ensemble des valeurs sur lequel *f* est dérivable et démontrer que pour tout nombre *a* de cet ensemble $g'(a) = 3a^2 - 6a$. (…. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ….)

b. La courbe de *g* admet-elle des tangentes parallèles à la droite d'équation *y = 9x* ?

***c.** Existe-t-il des valeurs de *a* pour lesquelles la tangente en *x = a* à la courbe de *g* est parallèle à la tangente à la courbe de *f* en *x = a* ?

BONUS : *« La facilité n'a aucun ……………….. »*

On considère la fonction *f* définie sur R par $f(x) = \left| x^2 - x - 2 \right|$

0. Compléter le « Théorème du tyran ».

1. a. Dresser le tableau de signe de $x^2 - x - 2$ sur R.

b. Expliciter alors l'expression de *f(x).*

2. Etudier la dérivabilité de *f* en –1.