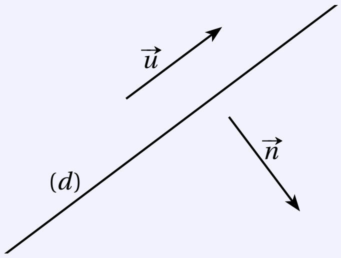
Applications du produit scalaire

1 Vecteur normal, perpendiculaires et cercle

1.1 Vecteur normal

Définition 1 (Vecteur normal à une droite).

Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$. On dit que le vecteur non nul $\vec{n}$ est un vecteur normal de (d) si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, c'est à dire si $\vec{u}.\vec{n} = 0$.



Propriété 1 (Équation cartésienne et vecteur normal).

Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère une droite (d).

- Si (d) a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal à (d).
- Réciproquement, si $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal à (d) alors (d) a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.

DÉMONSTRATION .

- Supposons que $(d) : ax + by + c = 0$ et considérons le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

  $\vec{u}.\vec{n} = -b \times a + a \times b = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{n}$ donc $\vec{n}$ est bien normal à (d).

- On suppose que $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal à (d) et on considère un point $\text{A}(\ x_0\ ;\ y_0\ )$ de la droite (d).

  Un point $\text{M}(\ x\ ;\ y\ )$ appartient à (d) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\text{AM}}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux c'est à dire si et seulement si $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.\vec{n}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix} = 0 \iff a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0 \iff ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0$.

Exemple 1. Équation cartésienne d'une perpendiculaire.

Dans $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$orthonormé, on considère les points $\text{A}(\,2\,;\,5\,)$, $\text{B}(\,-3\,;\,1\,)$ et $\text{C}(\,-2\,;\,-1\,)$.

i) Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de A du triangle ABC.

ii) Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment [BC].

Exemple 2.

1.2 Équation cartésienne d'un cercle

Propriété 2 (Équation cartésienne d'un cercle).

Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$du plan, un point $\text{M}(\ x\ ;\ y\ )$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(\ \alpha\ ;\ \beta\ )$ et de rayon $r > 0$ si et seulement si $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$.

DÉMONSTRATION .
En effet $\text{M}(\ x\ ;\ y\ ) \in \mathscr{C} \iff \Omega\text{M} = r \iff \Omega\text{M}^2 = r^2 \ldots$

Exemple 3.

i) Déterminer les coordonnées du centre Ω et le rayon du cercle $\mathscr{C}$ dont une équation cartésienne est $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$.

ii) Même question avec le cercle dont une équation cartésienne est $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 11 = 0$.

iii) Soient A(3 ; −2), B(−4 ; 2) Déterminer une équation cartésienne du cercle Γ de diamètre [AB].

iv) On donne A(−2 ; 2), B(1 ; 4), C(5 ; −2).

a) Déterminer la nature du triangle ABC.

b) Donner une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC.

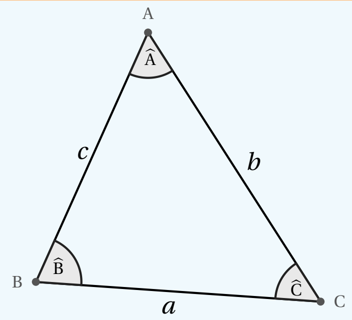
2 Relations métriques dans le triangle

2.1 Théorème d'Al-Kashi

Propriété 3 (Théorème d'Al-Kashi)**.**

Avec les notations de la figure ci-contre, on a :

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\widehat{\mathrm{BAC}}$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos\widehat{\mathrm{ABC}}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos\widehat{\mathrm{BCA}}$



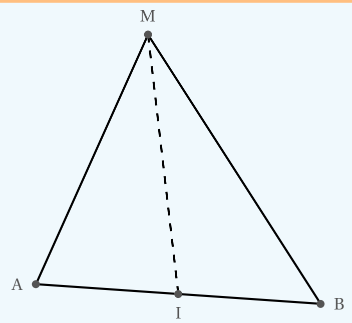
Démonstration .
$\mathrm{BC}^2 = \overrightarrow{\mathrm{BC}}^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AV}}\right)^2 = \overrightarrow{\mathrm{BA}}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{BA}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}^2 = b^2 + c^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\widehat{\mathrm{BAC}}$

Exemple 4. On considère le triangle ABC qui vérifie AB = 3, AC = 5 et $\widehat{\mathrm{BAC}} = 42°$. Calculer la longueur BC.

2.2 Théorème de la médiane

Propriété 4 (Théorème de la médiane)**.**

Soient A et B deux points du plan et I le milieu du segment [AB].
Pour tout point M du plan, on a $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = 2\mathrm{MI}^2 + \dfrac{\mathrm{AB}^2}{2}$.



Démonstration .
Nous allons utiliser la relation de Chasles en « injectant » le point I dans les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 &= \overrightarrow{\mathrm{MA}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{MB}}^2 \\
&= \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)^2 + \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}}\right)^2 \\
&= \overrightarrow{\mathrm{MI}}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{MI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{IA}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{MI}}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{MI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IB}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}}^2 \\
&= 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{IA}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{IB}}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{MI}} \cdot \underbrace{\left(\overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}}\right)}_{=\vec{0}} \\
&= 2\mathrm{MI}^2 + \mathrm{IA}^2 + \mathrm{IB}^2 \\
&= 2\mathrm{MI}^2 + \left(\frac{1}{2}\mathrm{AB}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\mathrm{AB}\right)^2 \\
&= 2\mathrm{MI}^2 + 2 \times \frac{1}{4}\mathrm{AB}^2 \\
&= 2\mathrm{MI}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{AB}^2 .
\end{aligned}$$

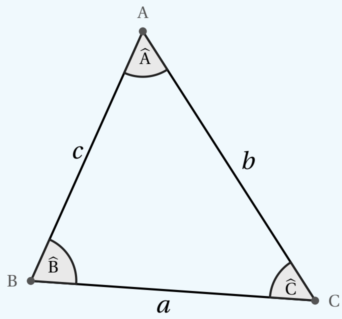
Exemple 5. Soit ABC un triangle tel que $\begin{cases} \mathrm{AB} = 4 \\ \mathrm{AC} = 5 \\ \mathrm{BC} = 7 \end{cases}$. Déterminer la longueur de la médiane issue de A.

2.3 Formule des sinus

Propriété 5 (Formule des sinus)**.**

Soit ABC un triangle d'aire S. Avec les notations de la figure ci-contre, on a : $\mathrm{S} = \dfrac{1}{2}bc.\sin\widehat{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{2}ac.\sin\widehat{\mathrm{B}} = \dfrac{1}{2}ab.\sin\widehat{\mathrm{C}}$

On en déduit que : $\dfrac{\sin\widehat{\mathrm{A}}}{a} = \dfrac{\sin\widehat{\mathrm{B}}}{b} = \dfrac{\sin\widehat{\mathrm{C}}}{c} = \dfrac{2\mathrm{S}}{abc}$.



DÉMONSTRATION .
On appelle H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Distinguer le cas où $\widehat{\mathrm{C}}$ est aigu et celui où $\widehat{\mathrm{C}}$ est obtus...
Exemple 6. Soit EFG un triangle tel que $\widehat{\mathrm{E}} = 70°7$, $\widehat{\mathrm{F}} = 30°$ et $\mathrm{FG} = 8\,cm$. Calculer EG et l'aire du triangle EFG.

3 Lignes de niveaux

3.1 Cercle

Propriété 6 ($\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}$)**.**

Pour tous points A, B et M du plan, on a : $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \mathrm{MI}^2 - \frac{1}{4}\mathrm{AB}^2$ où I est le milieu de [AB].

DÉMONSTRATION .

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}} &= \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}}+\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{MI}}+\overrightarrow{\mathrm{IB}}\right)\\
&= \mathrm{MI}^2 + \overrightarrow{\mathrm{MI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}} + \overrightarrow{\mathrm{MI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{IA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}}\\
&= \mathrm{MI}^2 + \overrightarrow{\mathrm{MI}}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{\mathrm{IB}}+\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{\mathrm{IA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}}\\
&= \mathrm{MI}^2 + \overrightarrow{\mathrm{IA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}}\\
&= \mathrm{MI}^2 + \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\\
&= \mathrm{MI}^2 - \frac{1}{4}\mathrm{AB}^2.
\end{aligned}$$

Propriété 7 (Produit scalaire et cercle)**.**

Soient A et B deux points du plan.
L'ensemble des points M du plan qui vérifient l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

DÉMONSTRATION .
Soit I le milieu de [AB]

D'après la propriété 6, $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \mathrm{MI}^2 - \frac{1}{4}\mathrm{AB}^2$ donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0 &\iff \mathrm{MI}^2 - \frac{1}{4}\mathrm{AB}^2 = 0\\
&\iff \mathrm{MI}^2 = \frac{1}{4}\mathrm{AB}^2\\
&\iff \mathrm{MI} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\\
&\iff \text{M appartient au cercle de centre I et de rayon } \frac{\mathrm{AB}}{2}\\
&\iff \text{M appartient au cercle de diamètre [AB].}
\end{aligned}$$

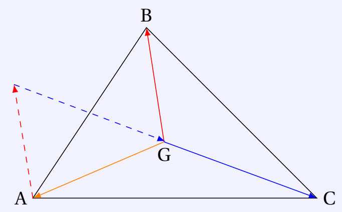
3.2 Centre de gravité d'un triangle

Définition 2 (Définition vectorielle)**.**

Soit ABC un triangle quelconque.

On appelle **centre de gravité** de ABC le point G tel que :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}.$$



Propriété 8.

Soient A, B et C trois points quelconques du plan.
Quel que soit le point M du plan, on a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

DÉMONSTRATION .
Notons G le centre de gravité du triangle ABC.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG} &= \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)\\ &= 3\overrightarrow{MG}+\underbrace{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}_{=\overrightarrow{0}\text{ par définition}}\\ &= 3\overrightarrow{MG}.\end{aligned}$$

Propriété 9.

Soient ABC un triangle quelconque du plan et G son centre de gravité.
Quel que soit le point M du plan,

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2.$$

DÉMONSTRATION .

$$\begin{aligned}MA^2+MB^2+MC^2 &= \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2\\ &= \overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}^2+\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}^2\\ &= 3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)}_{=\overrightarrow{0}}\\ &= 3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2.\end{aligned}$$

Propriété 10.

Soient ABC un triangle quelconque du plan et G son centre de gravité.
Soit M un point quelconque du plan.

$MA^2+MB^2+MC^2$ est minimal lorsque $M=G$.

DÉMONSTRATION .
D'après la propriété 9,

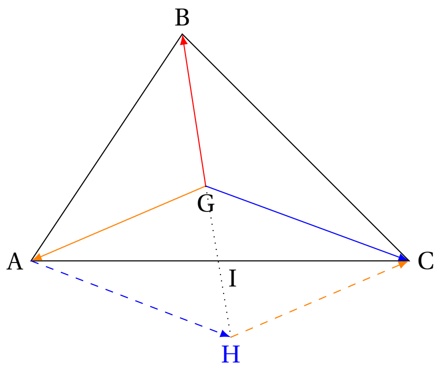
$$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2.$$

Ainsi, $MA^2+MB^2+MC^2$ est minimal quand $3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$ l'est aussi.
Or $GA^2+GB^2+GC^2$ est constant donc $3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$ est minimal quand $3MG$ l'est aussi, c'est-à-dire quand $MG=0$, soit quand $M=G$.

Propriété 11 (Un résultat connu ?).

Le centre de gravité d'une triangle est le point de concours de ses médianes.

DÉMONSTRATION .



Posons H tel que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{GC}$; ainsi, AGCH est un parallélogramme.
Posons I le milieu de [AC]. Ainsi,

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{GI}.$$

Donc :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \iff 2\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GC} = \vec{0},$$

ce qui signifie que $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GI}$ sont colinéaires et donc que les points B, G et I sont alignés.

On en déduit que G appartient à la médiane (BI).

Un raisonnement analogue permet de démontrer que G appartient aux deux autres médianes.

Ainsi, G est le point d'intersection des médianes de ABC. (on retrouve ainsi un résultat souvent énoncé au collège ou en classe de seconde).