CORRECTION DES EXERCICES

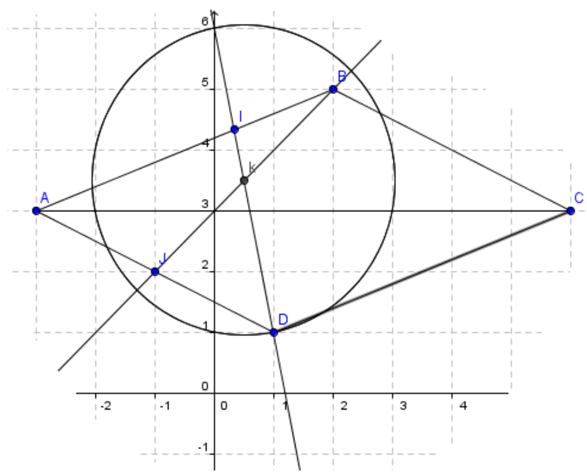
Exercice1 correction

$a)\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{ID}\right)=\dfrac{3\pi}{2}=-\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi].$

$b)\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{ID}\right)=\pi\ [2\pi]:$ c'est la mesure principale. a)

$c)\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{CI}\right)=\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA}\right)=\dfrac{3\pi}{2}=-\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi].$

Exercice2 correction



2- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\ 2\end{pmatrix}$ de même $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5\\ 2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ donc $ABCD$ est un parallélogramme.

3- Soit $I(x\,;y)$ $\overrightarrow{AI}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=\dfrac{2}{3}\times 5\\ y-3=\dfrac{2}{3}\times 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{13}{3}\end{cases}$

Coordonnées de $I\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{13}{3}\right)$. $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\ -2\end{pmatrix}$.

Soit $J(x\,;y)$ $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=\dfrac{1}{2}\times 4\\ y-3=\dfrac{1}{2}\times(-2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1\\ y=2\end{cases}$

Coordonnées de $J(-1\,;2)$.

4- a) Soit $M(x\,;y)$, une équation cartésienne de la droite

(*DI*) est telle que $\overrightarrow{DM}$ *et* $\overrightarrow{DI}$ sont colinéaires .

$\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{10}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\end{pmatrix}$. $\vec{DI}$ *et* $\overrightarrow{DM}$ *colinéaires* $\Leftrightarrow$ $\frac{10}{3}(x-1)+\frac{2}{3}(y-1)=0$ $\Leftrightarrow$ $10x+2y-12=0$ $\Leftrightarrow$ $5x+y-6=0$ (DI) .

4- b) (DI) : $5x+y-6=0$ soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de (*DI*) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\ 5\end{pmatrix}$

(BJ) : $x-y+3=0$ soit $\vec{v}$ un vecteur directeur de (*BJ*) $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

(*DI*) et (*BJ*) sont parallèles $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires.

Vérifions la relation de colinéarité : $-1\times1-5\times1=-1-5=-6\neq0$

$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (*DI*) et(*BJ*) ne sont pas parallèles.

4- c) $K(x\,;y)\in(DI)\cap(DJ)$ on résout le système $\begin{cases}5x+y-6=0\\ x-y+3=0\end{cases}$

par addition membre à membre on obtient $\begin{cases}x-y=-3\\ 6x-3=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x-y=-3\\ x=\frac{1}{2}\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{7}{2}\end{cases}$ Coordonnées de $K(\frac{1}{2};\frac{7}{2})$

5- a) Equation du cercle

$x^2+y^2-x-7y+6=0$ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+\frac{24}{4}=0$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{26}{4}=0$ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$

Γ est un cercle de centre $\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$ rayon $\sqrt{\frac{13}{2}}$

5- b) $D\in\Gamma$ si ses coordonnées vérifient l'équation du cercle.

$1^2+1^2-1-7+6=2-8+6=0$ donc $D\in\Gamma$

5- c) Les points d'intersection de Γ avec l'axe des ordonnées ont

une abscisse $x = 0$. On obtient une fonction polynôme $y^2-7y+6=0$

on résout $y^2-7y+6=0$ discriminant $\Delta=49-4\times6\times1=25$ $\Delta>0$

il y a deux racines $y_1=6$ $y_2=1$.

Les points d'intersections sont $(0\,;1)$ $(0\,;6)$.

Exercice3 correction

Soit ABCD un parallélogramme. On pose $\mathrm{AB}=a$ et $\mathrm{AD}=b$.

1°) Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BD}}=b^2-a^2$.

Indication : On décomposera les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ (règle du parallélogramme)

$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (relation de Chasles sous forme soustractive)

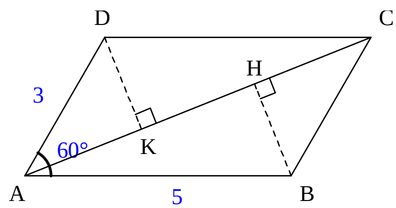
$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)\bullet\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\bullet\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{AD}}^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2$ (On applique l'identité remarquable scalaire $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\bullet\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$)

$=\mathrm{AD}^2-\mathrm{AB}^2$ (En effet, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}^2=\mathrm{AD}^2$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2=\mathrm{AB}^2$)

$=b^2-a^2$

Dans la suite, on note H et K les projetés orthogonaux respectifs des points B et D sur la droite (AC).

2°) Dans cette question, on suppose que $a=5$, $b=3$ et $\widehat{\mathrm{BAD}}=60°$.



a) En écrivant que $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, calculer AC^2 ; en déduire AC.

$\mathrm{AC}^2=\overrightarrow{\mathrm{AC}}^2$

$=\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)^2$

$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}^2$ (identité remarquable scalaire)

$=\mathrm{AB}^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\mathrm{AD}^2$

$=5^2+2\times5\times3\times\cos 60°+3^2$

$=25+2\times5\times3\times\dfrac{1}{2}+9\quad=25+\cancel{2}\times5\times3\times\dfrac{1}{\cancel{2}}+9\quad=25+15+9\quad=49$

Donc $\mathrm{AC}=\sqrt{49}=7$.

On peut vérifier ce résultat géométriquement en faisant une figure très soignée et en mesurant la longueur du segment $[\mathrm{AC}]$ à la règle graduée.

b) À l'aide du résultat de la question a), calculer HK (valeur exacte).

D'une part, d'après le résultat de la question 1°) :

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BD}}=3^2-5^2=9-25\quad=-16$

D'autre part, d'après la propriété des projetés orthogonaux :

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{HK}}\quad=-\,\mathrm{AC}\times\mathrm{HK}$ car $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HK}}$ sont colinéaires de sens contraire.

D'où $-16=-7\times\mathrm{HK}$.

On en déduit que $\mathrm{HK}=\dfrac{16}{7}$.

On peut vérifier ce résultat géométriquement en faisant une figure très soignée et en mesurant la longueur du segment $[\mathrm{HK}]$ à la règle graduée.

3°) Dans cette question, on suppose que ABCD est un rectangle.

a) Démontrer que $\text{HK}=\dfrac{\left|a^2-b^2\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

D'autre part, d'après la propriété des projetés orthogonaux :

$\overrightarrow{\text{AC}}\bullet\overrightarrow{\text{BD}}=\overrightarrow{\text{AC}}\bullet\overrightarrow{\text{HK}}$

Donc $\overrightarrow{\text{AC}}\bullet\overrightarrow{\text{BD}}=\text{AC}\times\text{HK}$ si $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{HK}}$ sont de même sens

et $\overrightarrow{\text{AC}}\bullet\overrightarrow{\text{BD}}=-\,\text{AC}\times\text{HK}$ si $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{HK}}$ sont colinéaires de sens contraires.

Il faudrait théoriquement étudier le cas où $\text{H}=\text{K}$. Dans ce cas, $\overrightarrow{\text{HK}}=\vec{0}$ et le résultat subsiste.

On en déduit, d'après les deux cas précédents, que $\left|\overrightarrow{\text{AC}}\bullet\overrightarrow{\text{BD}}\right|=\text{AC}\times\text{HK}$.

Or $\text{AC}=\sqrt{a^2+b^2}$ (d'après le théorème de Pythagore).

Donc $\left|b^2-a^2\right|=\sqrt{a^2+b^2}\times\text{HK}$.

Or $\left|b^2-a^2\right|=\left|a^2-b^2\right|$.

Par suite, $\left|a^2-b^2\right|=\sqrt{a^2+b^2}\times\text{HK}$.

On en déduit que $\text{HK}=\dfrac{\left|a^2-b^2\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

b) Démontrer que $\text{HK}=\frac{1}{2}\text{AC}\iff a=b\sqrt{3}$ ou $b=a\sqrt{3}$.

On rédigera sous la forme d'une chaîne d'équivalences.

$$\begin{aligned}
\text{HK}=\frac{1}{2}\text{AC} &\iff \frac{\left|a^2-b^2\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\\
&\iff \left|a^2-b^2\right|=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)\\
&\iff a^2-b^2=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right) \text{ ou } a^2-b^2=-\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)\\
&\iff 2a^2-2b^2=a^2+b^2 \text{ ou } 2a^2-2b^2=-\,a^2-b^2\\
&\iff a^2=3b^2 \text{ ou } b^2=3a^2\\
&\iff a=b\sqrt{3} \text{ ou } b=a\sqrt{3} \quad \text{(car } a \text{ et } b \text{ sont tous les deux des réels positifs)}
\end{aligned}$$

Exercice4 correction

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 8 et un point A tel que $OA = 5$.
On considère deux points E et F variables sur le cercle $\mathcal{C}$ tels que le triangle AEF soit rectangle en A. On note M le milieu de [EF].

1°) Démontrer que l'on a : $OM^2 + AM^2 = 64$.
Indication : on travaillera dans les triangles OME et AEF.

$OE = OF = 8$ donc le triangle OEF est isocèle en O.

Omme M est le milieu de [EF], on en déduit que (OM) $\perp$ (EF).

Le triangle OME est rectangle en M donc d'après le théorème de Pythagore,

$OM^2 + ME^2 = OE^2$ soit $OM^2 + ME^2 = 64 \quad (1)$.

Le triangle AEF est rectangle en A donc $MA = ME = MF$.

Par suite, (1) donne $OM^2 + AM^2 = 64 \ (2)$.

2°) En utilisant la formule de la médiane dans le triangle OAM, démontrer alors que, lorsque E et F varient sur $\mathcal{C}$, tels que AEF soit rectangle en A, le point M reste sur un cercle fixe Γ que l'on définira.

On note I le milieu de [OA].

On a : $OM^2 + AM^2 = 2MI^2 + \dfrac{OA^2}{2}$ soit $OM^2 + AM^2 = 2MI^2 + \dfrac{25}{2}$ (car $OA = 5$).

L'égalité (2) donne donc $2MI^2 + \dfrac{25}{2} = 64$ doit $MI^2 = \dfrac{103}{4}$.

On en déduit que $MI = \dfrac{\sqrt{103}}{2}$.

Par suite, M appartient au cercle Γ de centre I et de rayon $\dfrac{\sqrt{103}}{2}$.

Exercice5 correction

Dans cet exercice, le plan n'est pas muni d'un repère orthonormé. Il n'était donc pas possible d'utiliser les coordonnées du point M !!!!!!!!!!

Partie 1

Dans cette partie, on prend $m=3$.

1°) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_3$ est un cercle dont on déterminera le centre I et le rayon *r*.

$\mathcal{C}_3$ a pour équation cartésienne $x^2+y^2+2x-6y+5=0$.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$\text{M}\in\mathcal{C}_3 \Leftrightarrow x^2+y^2+2x-6y+5=0 \qquad \Leftrightarrow (x+1)^2-1+(y-3)^2-9+5=0 \qquad \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=5$

$\mathcal{C}_3$ est donc le cercle de centre $\text{I}(-1\,;3)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

2°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_3$ et la droite *D* d'équation $x+y=0$.
On rédigera ainsi (modèle à recopier et compléter) :
« Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_3$ et de *D* sont les solutions de l'équation ……….. »

D a pour équation $y=-x$.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_3$ et de *D* sont les solutions de l'équation
$x^2+(-x)^2+2x-6\times(-x)+5=0 \ \ (1)$.

$(1) \Leftrightarrow x^2+x^2+2x+6x+5=0$
$\quad\ \Leftrightarrow 2x^2+8x+5=0 \ \ (1')$

Le discriminant réduit de $(1')$ est donné par $\Delta'=6$.

$\Delta'>0$ donc $(1')$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1=\dfrac{-4+\sqrt{6}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-4-\sqrt{6}}{2}$.

Les abscisses des oints d'intersection de $\mathcal{C}_3$ et de *D* sont donc égales à $\dfrac{-4+\sqrt{6}}{2}$ et $\dfrac{-4-\sqrt{6}}{2}$.

Partie 2

Dans cette partie, m est quelconque.

1°) Déterminer l'ensemble E des réels m tels que la courbe $\mathcal{C}_m$ soit un cercle.
Pour $m \in E$, préciser les coordonnées du centre Ω_m de $\mathcal{C}_m$.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$\mathrm{M} \in \mathcal{C}_m \Leftrightarrow x^2+y^2+2x-2my+5=0 \quad \Leftrightarrow (x+1)^2-1+(y-m)^2-m^2+5=0 \quad \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-m)^2=m^2-4$

$\mathcal{C}_m$ est un cercle $\Leftrightarrow m^2-4>0$

$\Leftrightarrow m<-2$ ou $m>2$

L'ensemble E des réels m tels que la courbe $\mathcal{C}_m$ soit un cercle est $]-\infty\,;-2[\cup]2\,;+\infty[$.

Pour $m \in E$, le centre Ω_m de $\mathcal{C}_m$ a pour coordonnées $(-1\,;m)$.

2°) Déterminer l'ensemble des points Ω_m lorsque m décrit E.

$x_{\Omega_m}=-1$ donc Ω_m appartient à la droite d'équation $x=-1$.

De plus, $y_{\Omega_m}=m$.

Par conséquent, lorsque m décrit E, Ω_m décrit la réunion des demi-droites définies par les systèmes $\begin{cases} x=-1 \\ y<-2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x=-1 \\ y>2 \end{cases}$.

Il est conseillé de faire un graphique pour bien comprendre.