

I° Première approche

1. Équations de Lorenz

Le système dynamique différentiel de Lorenz s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + \rho x - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

σ : est la constante de Prandtl, caractérise la viscosité et la conductivité thermique du fluide.

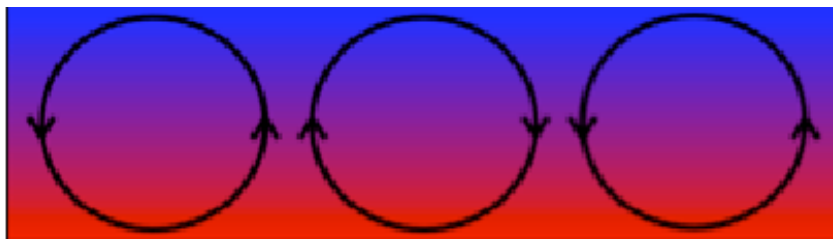
β : mesure le rapport entre la hauteur et la largeur du système de convection.

ρ : représente la différence de température entre le haut et le bas du réservoir, proportionnel au nombre de Rayleigh.

2. Convection de Rayleigh-Bénard

Lorenz, à travers le système d'équations précédent, propose en réalité un modèle simple d'un phénomène physique complexe : la convection de Rayleigh-Bénard.

On considère une cellule de convection, c'est-à-dire un réservoir contenant un fluide, chaud en bas du réservoir, et froid en haut.



* Si la variation de température entre le haut et le bas du réservoir est faible et si l'écoulement du fluide est stationnaire (i.e. si ρ est petit) alors on assiste au phénomène de convection thermique : l'énergie thermique est acheminée du bas vers le haut. (Cette phase correspondra par la suite au cas $0 < \rho < 1$)

* Si l'on élève la condition initiale portant sur la température, et si ρ est plus grand, l'écoulement devient légèrement perturbé. Ainsi la conduction thermique n'est plus

suffisante, il se forme alors des rouleaux de convections qui permettent le transport de la chaleur. Ces derniers sont métastables: un changement sur les conditions initiales, même minime, peut faire changer leur sens de rotation, mais ne les détruit pas. (Cas $1 < \rho < \rho_h$)

* Enfin, si l'écart de température s'élève encore, l'écoulement devient chaotique. Les rouleaux de convection deviennent instables, c'est-à-dire qu'ils apparaissent et disparaissent très rapidement. (Cas $\rho > \rho_h$)

Les paramètres de ce système peuvent être interprétés de la manière suivante :

x : est proportionnel à l'intensité du mouvement de convection, à la vitesse du fluide (positif pour un mouvement dans le sens des aiguilles d'une montre, plus la valeur est grande plus le mouvement de convection est vigoureux).

y : est proportionnel à la différence de température entre les courants ascendants et les courants descendants (positif lorsque le fluide chaud est au fond du réservoir).

z : est proportionnel à la déviation du profil du gradient de température par rapport à sa valeur d'équilibre.

t : représente le temps.

II° Approche vectorielle

1. Recherche des points critiques

Point critique (ou fixe) : point de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$, tel que $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$

(Correspond à une solution constante du système)

On résoud donc le système :

$$\begin{array}{llll} \frac{dx}{dt} = 0 & \sigma(y - x) = 0 & x = y & x = y \\ \frac{dy}{dt} = 0 & \Leftrightarrow -xz + \rho x - y = 0 & \Leftrightarrow x(\rho - 1 - z) = 0 & \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } z = \rho - 1 \\ \frac{dz}{dt} = 0 & xy - \beta z = 0 & x^2 = \beta z & x^2 = \beta z \end{array}$$

Si $x = 0$ alors $y = 0$ et $z = 0$, donc $C_0 (0,0,0)$ est point critique.

Si $z = \rho - 1$ alors $x = \pm \sqrt{\beta(\rho - 1)}$ et $y = \pm \sqrt{\beta(\rho - 1)}$, $\rho > 1$

Donc les points $C_+(\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$ et $C_-(\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$, $\rho > 1$, sont points critiques.

2. Linéarisation du système

Pour définir les zones de changement de comportement du fluide, il est indispensable d'étudier la stabilité des points critiques.

Pour se faire, il faut linéariser le système au voisinage d'un point fixe.

$$\text{Le système peut s'écrire : } \frac{du}{dt} = f(u) \text{ avec } u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ et } f(u) = \begin{bmatrix} \sigma(y-x) \\ -xz + \rho x - y \\ xy - \beta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f1(u) \\ f2(u) \\ f3(u) \end{bmatrix}$$

On effectue un développement de Taylor au premier ordre de f au voisinage du point fixe $u0 = \begin{bmatrix} x0 \\ y0 \\ z0 \end{bmatrix}$

$$f(u) = f(u0) + (u - u0)Jf(u0) + (u - u0)\varepsilon(u) \text{ avec } \lim_{u \rightarrow u0} \varepsilon(u) = 0$$

Autrement dit, au voisinage de $u0$:

$$\begin{aligned} f(u) &\approx f(u0) + (u - u0) Jf(u0) \\ f(u) &\approx (u - u0) Jf(u0) \text{ car } f(u0) = 0 \end{aligned}$$

D'autre part $\frac{du}{dt} = \frac{d(u - u0)}{dt}$ donc, pour u voisin de $u0$:

$$\frac{du}{dt} = f(u) \approx \frac{d(u - u0)}{dt} = (u - u0) Jf(u0)$$

En posant $v = u - u0$ on obtient : $\frac{dv}{dt} = v \cdot Jf(u0)$

(Remarque : cela revient à placer l'origine en $u0$.)

$$\text{Avec } Jf(u0) = \begin{bmatrix} \frac{df1}{dx}(u0) & \frac{df1}{dy}(u0) & \frac{df1}{dz}(u0) \\ \frac{df2}{dx}(u0) & \frac{df2}{dy}(u0) & \frac{df2}{dz}(u0) \\ \frac{df3}{dx}(u0) & \frac{df3}{dy}(u0) & \frac{df3}{dz}(u0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z0 & -1 & -x0 \\ y0 & x0 & -\beta \end{bmatrix}$$

3. Stabilité des points fixes

Point de cours :

La stabilité du point fixe u_0 est déterminée par le signe des valeurs propres de la Jacobienne.

Soit le système différentiel suivant : (E) $\frac{du}{dt} = A \cdot u$ où $u = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$

On suppose A diagonalisable.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres de A, soit V_1, V_2, V_3 les vecteurs propres correspondants.

Alors les solutions du système différentiel (E) sont de la forme :

$$u(t) = a_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot V_1 + a_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot V_2 + a_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot t} \cdot V_3$$

Différents cas se présentent alors :

- Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont réelles

* Si $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$

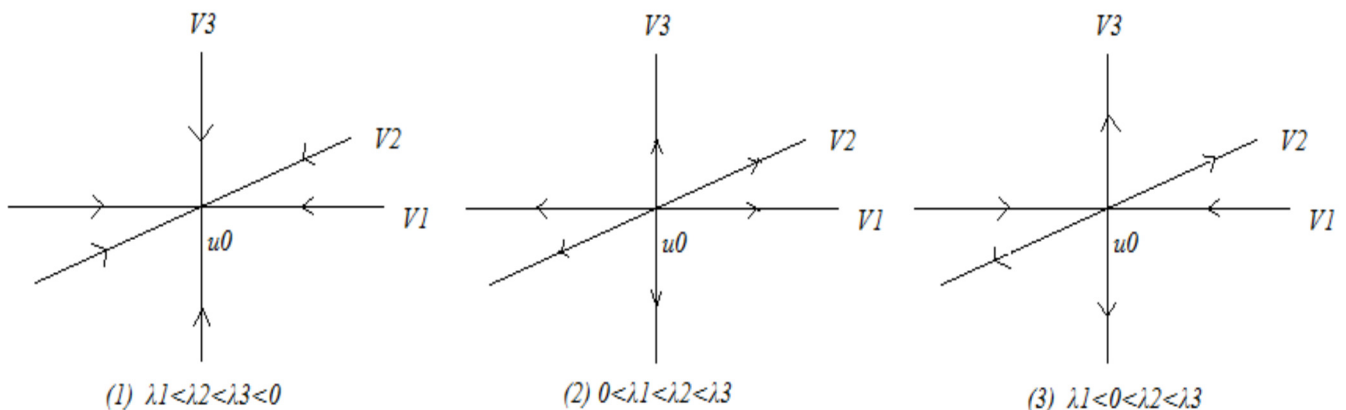
Alors toutes les solutions tendent vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$, V_1, V_2, V_3 engendrent donc des sous espaces "stables" (au sens solution d'équation différentielle), le point u_0 est alors appelé *noeud-attractif* ou *noeud-stable*. (schéma (1))

* Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$

Alors toutes les solutions s'éloignent à l'infini lorsque $t \rightarrow \infty$, V_1, V_2, V_3 engendrent donc des sous espaces "instables", le point u_0 est alors appelé *noeud-instable* ou *noeud-répulsif*. (schéma (2))

* Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$

Alors le sous espace propre engendré par V_1 est "stable", et les sous espaces propres engendrés par V_2 et V_3 sont "instables", ainsi seules les solutions colinéaires à V_1 restent bornées, le point u_0 est alors appelé *col* ou *point selle*. (schéma (3))



- Si λ_1, λ_2 sont complexes conjuguées de la forme $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, et λ_3 réelle

On considère le cas où $\lambda_3 < 0$.

Alors les vecteurs propres sont de la forme $V_1 = a + ib$ et $V_2 = a - ib$,

D'où $u(t) = e^{\alpha \cdot t} (a \cdot (a_1 \cdot \cos(\beta t) + a_2 \cdot \sin(\beta t)) + b \cdot (a_2 \cdot \cos(\beta t) - a_1 \cdot \sin(\beta t))) + a_3 e^{\lambda_3 \cdot t} V_3$

Si $\alpha=0$, les solutions sont périodiques et u_0 est un centre.

Si $\alpha < 0$, toutes les solutions ont pour limite 0 lorsque $t \rightarrow \infty$ et u_0 est alors un *point focal stable* ou foyer attractif.

Si $\alpha > 0$, les solutions divergent et u_0 est alors un *point focal instable* ou foyer répulsif.

Application :

- Point fixe $C_0 (0,0,0)$

On considère donc la Jacobienne de f en C_0 ,

$$Jf(C_0) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix}$$

Qui a pour polynôme caractéristique : $P(\lambda) = (\lambda + \beta) (\lambda^2 + (\sigma + 1) \cdot \lambda + \sigma(1 - \rho))$,

Et dont les valeurs propres sont : $\lambda_{1, 2} = \frac{-(1 + \sigma) \pm \sqrt{(1 + \sigma)^2 - 4\sigma(1 - \rho)}}{2}$ et $\lambda_3 = -\beta$

Si $0 < \rho < 1$, toutes les valeurs propres sont réels négatives donc C_0 est un point stable.

Si $1 < \rho$, λ_1 ou λ_2 est positive, C_0 est alors instable.

- Points fixes C_+ et C_- (pour $\rho > 1$)

on considère donc la jacobienne de f en C_+ et C_-

$$Jf(C_{\pm}) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp \sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ \pm \sqrt{\beta(\rho - 1)} & \pm \sqrt{\beta(\rho - 1)} & -\beta \end{bmatrix}$$

dont le polynôme caractéristique est : $P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + 1 + \beta) \cdot \lambda^2 + (\beta(\rho + \sigma)) \cdot \lambda - 2\sigma\beta(\rho - 1)$
Ce polynôme admet une racine réelle négative et deux racines complexes conjuguées l'une de l'autre.
La partie réelle de ces dernières solutions est négative pour ρ proche de 1 et augmente avec lui. Donc

pour ρ suffisamment faible, les points fixes C_{\pm} sont stables.

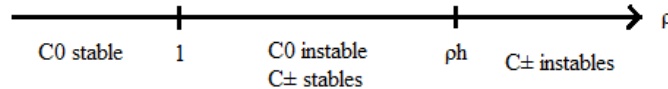
Pour une certaine valeur limite ρ_h de ρ , les deux solutions sont imaginaires pures, puis la partie réelle devient positive. Les points fixes deviennent alors instables.

Pour trouver ρ_h , il faut résoudre $P(\lambda) = 0$ avec $\lambda = iw$.

On obtient $\rho_h = \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1}$

Application numérique : si l'on prend $\sigma = 10$ et $\beta = \frac{8}{3}$, $\rho_h = 24,737$

En résumé :



III° Méthode d'Euler

1.Nécessité – Principe

La linéarisation consiste à approximer les équations au voisinage des points fixes pour pouvoir les résoudre de manière "classique", cependant cette méthode ne permet pas d'approcher les solutions du système de départ convenablement, notamment pour les cas où $\rho > \rho_h$. Ainsi, une approximation numérique des solutions est ici pertinente pour parachever la résolution. Il existe de nombreuses méthodes d'intégration, comme la méthode d'Euler ou de Runge Kutta.

La forme générale de la figure ne dépend pas des conditions initiales et de la méthode d'intégration choisies, nous avons décidé ici de suivre la méthode d'Euler, bien que moins précise. Cependant, elle constitue une approximation suffisante dans le cadre de notre étude.

Principe :

On rappelle que si une fonction est f dérivable en x_0 , l'équation de la tangente à la courbe en x_0 est donnée par :

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

C'est la meilleure approximation affine de f en x_0 . Elle nous permet d'avoir une valeur approchée de $f(x)$ lorsque x est voisin de x_0 , on peut ainsi écrire, pour x voisin de x_0 :

$$f(x) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Si on pose $h = x - x_0$, on obtient : $f(x_0 + h) \approx f'(x_0) \cdot h + f(x_0)$

Si on s'intéresse maintenant à une fonction f que l'on ne connaît pas explicitement mais qui vérifie certaines propriétés différentielles, la méthode d'Euler va nous permettre d'en tracer non pas la courbe représentative, mais une suite de points (M_n) proches de la courbe représentative de f .

Le principe consiste à travailler avec les tangentes successives à C_f , aux points d'abscisses respectives $x_0, x_1, \dots, x(n)$ où les x_i sont calculés en choisissant un pas h et en utilisant la relation : $x(n+1) = x(n) + h$

Pour le calcul des ordonnées : si (T_n) désigne la tangente à la courbe au point d'abscisse $x(n)$ on a alors l'approximation : $f(x(n) + h) \approx f'(x(n)) \cdot h + f(x(n))$, c'est-à-dire $f(x(n+1)) \approx f'(x(n)) \cdot h + f(x(n))$

En notant $y(n) = f(x(n))$ on définit ainsi une suite de point $M_n(x(n); y(n))$, qui approximeront d'autant mieux la courbe représentative de f que le pas h choisi sera faible.

2. Programme

Le logiciel de calcul formel utilisé est Maple 12.

```
restart;
with(plots) :

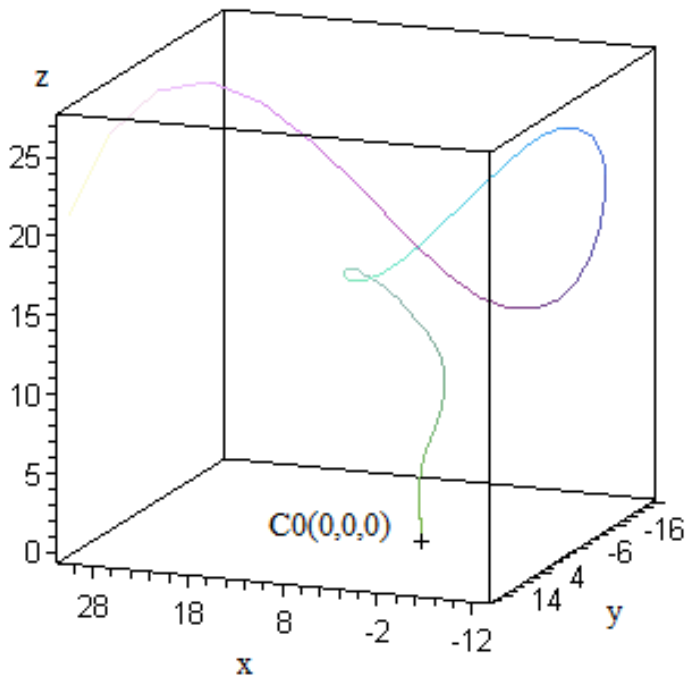
Lorenz := proc(s, b, r, p)
local f, g, h, L, k, n, o, x, y, z ;
f := (x, y, z) → x + p · (s · (y - x)) ;
g := (x, y, z) → y + p · (r · x - y - x · z) ;
h := (x, y, z) → z + p · (x · y - b · z) ;
x := x0;
y := y0;
z := z0;
L := NULL ;
for k from 1 to 5000 do
L := L, [f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)];
n := x;
o := y;
x := f(x, y, z) ;
y := g(n, y, z) ;
z := h(x, o, z);
end do ;
L := [L];
pointplot3d(L, connect = true, axes = boxed);
end proc ;
```

3. Courbes et interprétations

* Etude pour $0 < \rho < 1$

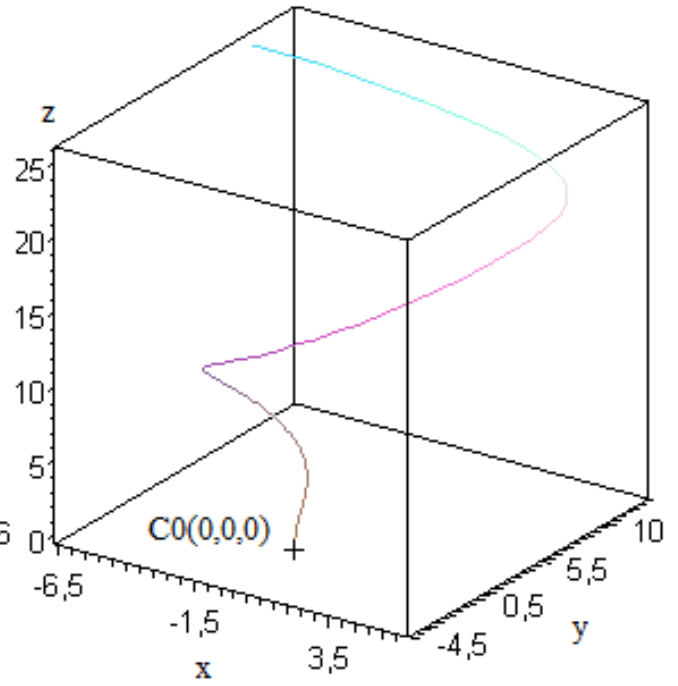
$$\rho = 0, \sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}$$

$$x_0 = 32, y_0 = 21, z_0 = 15$$



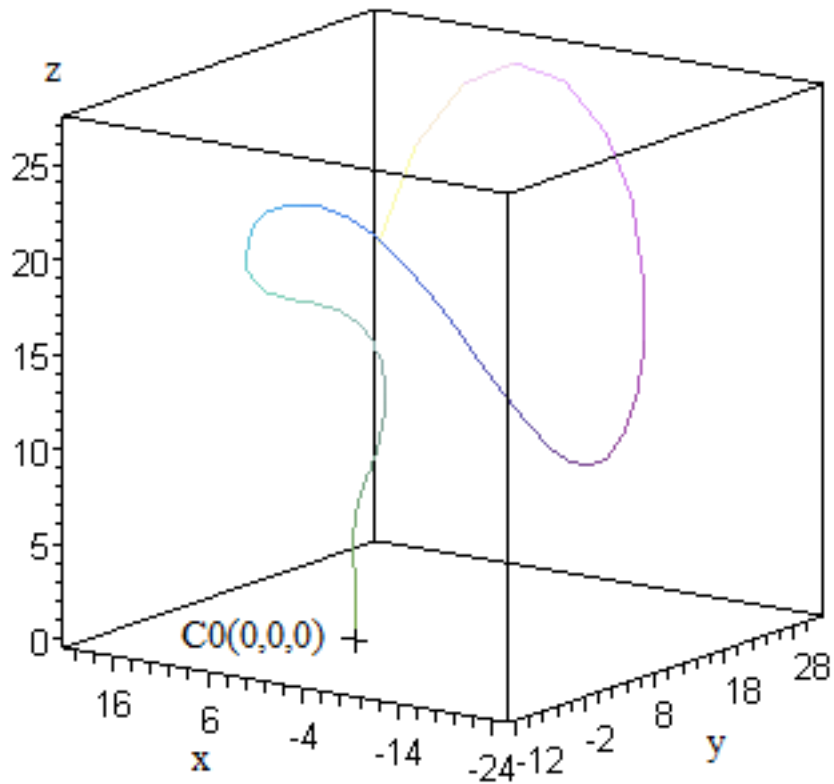
$$\rho = 0.5, \sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}$$

$$x_0 = -8, y_0 = 8, z_0 = 27$$



$$\rho = 0.9, \sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}$$

$$x_0 = 32, y_0 = 23, z_0 = 8$$

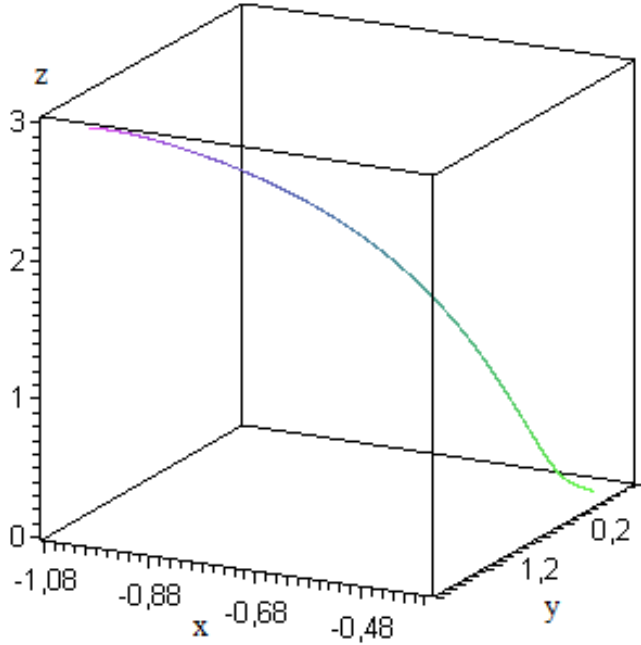


Ces premières courbes montrent que lorsque $0 < \rho < 1$, la trajectoire converge toujours vers le point $(0,0,0)$, quelque soit les conditions initiales. Cela confirme le premier résultat de l'analyse effectuée précédemment : pour $0 < \rho < 1$, le point $C_0(0,0,0)$ est stable.

* Etude pour $1 < \rho \leq \rho_h$

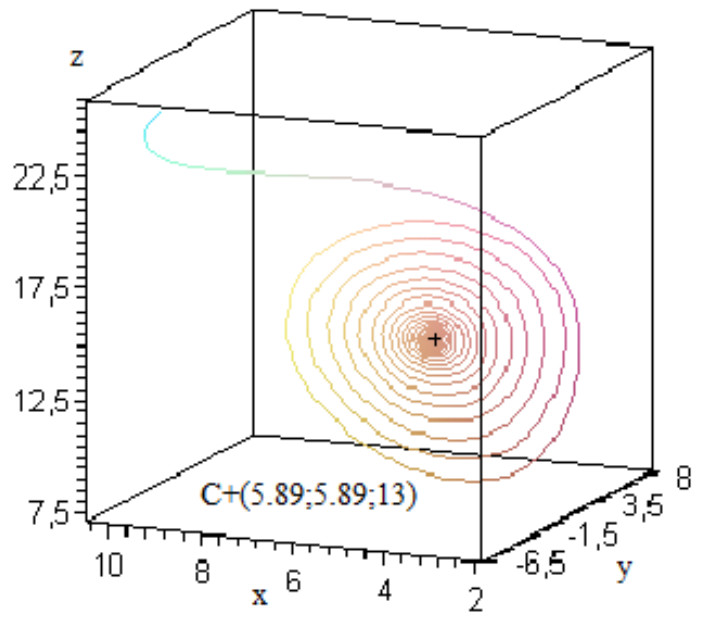
$$\rho = 1.001, \sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}$$

$$x_0 = 2, y_0 = -1, z_0 = 3$$



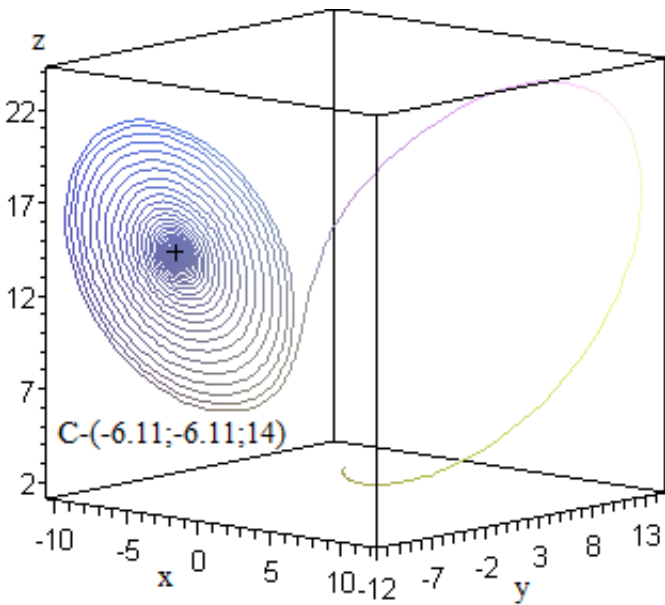
$$\rho = 14, \sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}$$

$$x_0 = -8, y_0 = 8, z_0 = 27$$



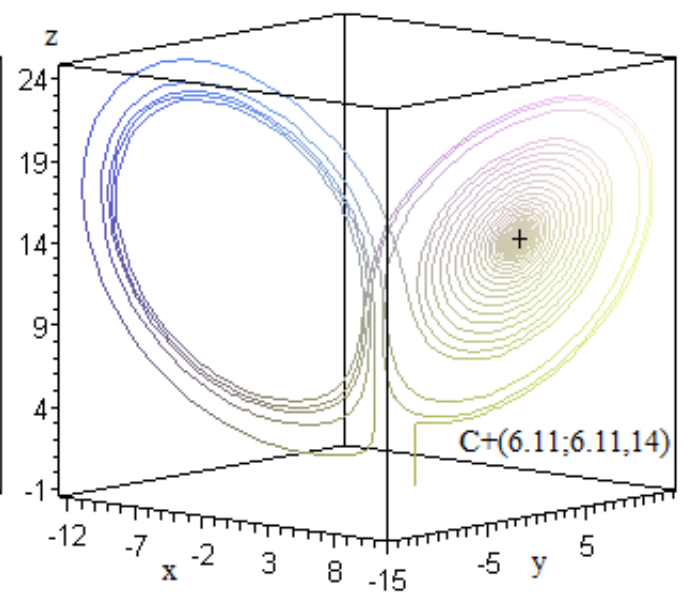
$$\rho = 15, \sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}$$

$$x_0 = 2, y_0 = -1, z_0 = 3$$



$$\rho = 15, \sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}$$

$$x_0 = 2.001, y_0 = -1, z_0 = 3$$



On remarque que pour $1 < \rho \leq \rho_h$, le point $C_0 (0,0,0)$ devient instable, c'est-à-dire qu'il n'y a plus convergence vers ce point. Pour des valeurs de ρ plus grandes, les deux autres points fixes C_+ et C_- apparaissent : la solution converge alors vers l'un ou l'autre des deux points. Là encore, la théorie est vérifiée, C_+ et C_- sont stables.

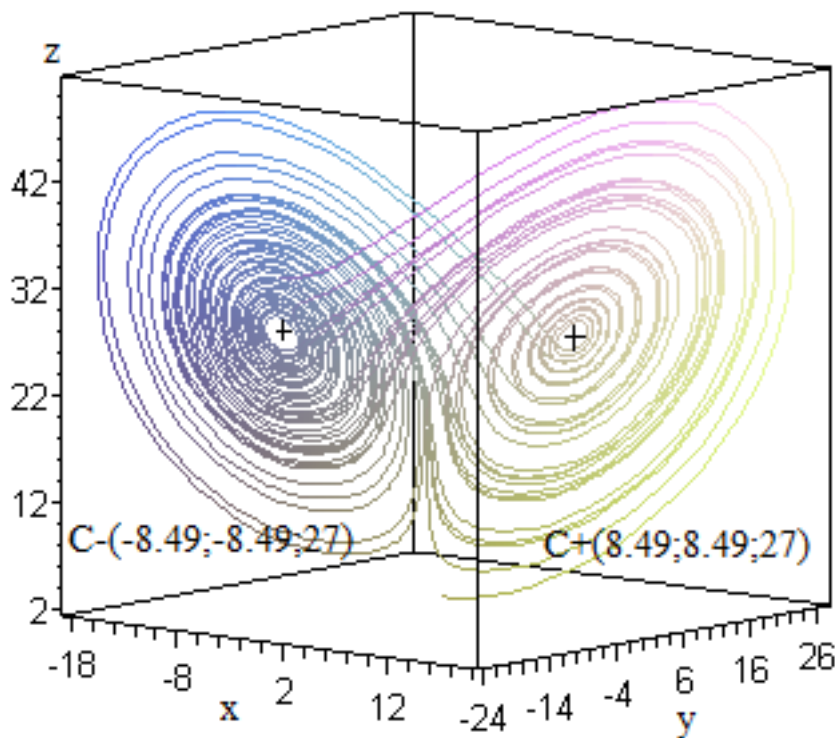
On remarque également que les conditions initiales constituent un facteur déterminant pour l'allure de la courbe. En effet, pour $\rho = 15$, en changeant d'un millièème la position en x , on peut observer un changement de convergence, la solution converge "à gauche" pour $x = 2$, et "à droite" pour $x = 2.001$.

Ceci prouve l'extrême sensibilité aux conditions initiales dans cette intervalle, principale caractéristique du chaos.

En résumé, l'intervalle compris entre 1 et 20 constitue une zone de stabilité pour les points fixes C_+ et C_- . Néanmoins, on observe que la trajectoire "saute" d'un point fixe à un autre avec une variation même minimale des conditions initiales. On appelle cet intervalle le *chaos transitoire*.

* Etude pour $\rho > \rho_h$

$$\rho = 28, \sigma = 10, \beta = \frac{8}{3} \quad x_0 = 2, y_0 = -1, z_0 = 3$$



La courbe standard $\rho = 28$ est très intéressante: on voit se tracer deux surfaces. La trajectoire s'éloigne et tend vers l'un des points fixes puis est repoussé. Mais à un instant t , la trajectoire "saute" d'une surface à l'autre. Et le phénomène d'attraction-rejet se répète.

Tout ceci est totalement imprévisible, le système évolue dans un régime purement chaotique.

Remarque : On peut ici faire le lien avec la définition théorique d'attracteur.

Si on considère un système dynamique chaotique, l'attracteur A qui lui est associé est la limite asymptotique des solutions, partant de toutes conditions initiales situées dans un ensemble B, appelé bassin d'attraction. Autrement dit, un attracteur est un ensemble ou un espace vers lequel un système évolue de façon irréversible en l'absence de perturbations.

D'autre part, un attracteur étrange est caractérisé par son extrême sensibilité aux conditions initiales.

A noter qu'il n'existe pas encore de définition précise et universelle en mathématiques, la définition donnée ici est extraite de "Attracteurs et dimensions" de P. Girault.

IV° Approche de la dimension de Hausdorff

1. Définition

Soit X un espace métrique, soit $Y \subset X$.

Pour $d \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, on pose : $\mu(Y, d, \varepsilon) = \inf \left(\sum_i r_i^d \right)$, où la borne inférieure est pour tous les recouvrements de Y par une famille de boules $(B_i)_{i \in I}$, de rayons $r_i \leq \varepsilon$.

La fonction $\varepsilon \rightarrow \mu(Y, d, \varepsilon)$ est décroissante.

On note $\mu(Y, d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(Y, d, \varepsilon) = \sup (\mu(Y, d, \varepsilon), \varepsilon > 0)$

Ce nombre est la mesure de Hausdorff en dimension d de Y.

On peut montrer qu'il existe un nombre réel $d_0 \in \mathbb{R}^*_+$ tel que :

$\mu(Y, d) = \infty$ pour $d < d_0$, et $\mu(Y, d) = 0$ pour $d > d_0$

Ce nombre est appelé la dimension de Hausdorff de Y.

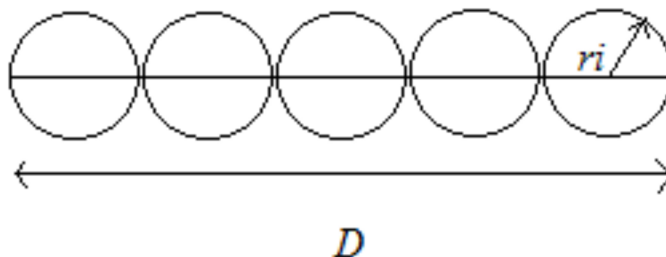
Concrètement, un attracteur ayant une dimension de Hausdorff proche de 2 s'apparentera plutôt à une surface, tandis qu'un attracteur ayant une dimension de Hausdorff proche de 3 sera assimilable à une surface "très entortillée", presque à un volume.

2. Application à des cas fondamentaux

* Cas d'un segment

Soit $X = \mathbb{R}$ muni de la norme usuelle et $Y =$ Segment de longueur D

Soit $d \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$



On pose n_i le nombre de boules de rayon r_i minimal pour recouvrir le segment.

On a : $ni = \frac{D}{2ri}$

D'où $\mu(ri) = \inf \left(\sum_i ri^d \right) = ni \cdot ri^d = \frac{D}{2ri} \cdot ri^d = \frac{D}{2} ri^{d-1}$

- Si $d = 1$, alors $\inf \left(\sum_i ri^d \right) = \frac{D}{2}$

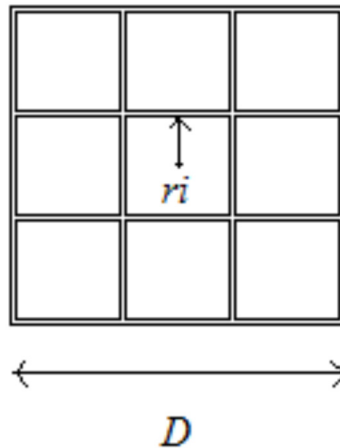
- Si $d < 1$, alors $\lim_{ri \rightarrow 0} \left(\inf \left(\sum_i ri^d \right) \right) = \lim_{ri \rightarrow 0} \left(\frac{D}{2} ri^{d-1} \right) = \infty$

- Si $d > 1$, alors $\lim_{ri \rightarrow 0} \left(\inf \left(\sum_i ri^d \right) \right) = 0$

La dimension de Hausdorff de Y est donc égale à 1.

* Cas d'une surface

Soit $X = \mathbb{R}^2$ muni de la norme infinie et $Y = \text{Carré de coté } D$
 Soit $d \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$



On pose ni comme précédemment.

On a : $ni = \frac{D^2}{4ri^2}$

D'où, $\mu(ri) = \inf \left(\sum_i ri^d \right) = ni \cdot ri^d = \frac{D^2}{4ri^2} \cdot ri^d = \frac{D^2}{4} \cdot ri^{d-2}$

- Si $d = 2$, alors $\lim_{r_i \rightarrow 0} \left(\inf \left(\sum_i r_i^d \right) \right) = \frac{D^2}{4}$

- Si $d < 2$, alors $\lim_{r_i \rightarrow 0} \left(\sum_i r_i^d \right) = \lim_{r_i \rightarrow 0} \left(\frac{D^2}{4} r_i^{d-2} \right) = \infty$

- Si $d > 2$, alors $\lim_{r_i \rightarrow 0} \left(\inf \left(\sum_i r_i^d \right) \right) = 0$

La dimension de Hausdorff de cette surface est donc égale à 2.

3. Dimension de Hausdorff dans le cas de l'attracteur de Lorenz

Dans la littérature, on peut voir que la dimension de Hausdorff de l'attracteur de Lorenz peut être majorée par 2,5.

Cependant des simulations numériques montreraient que cette dimension serait en fait proche de 2,06. Autrement dit, l'attracteur de Lorenz est presque une surface, sans toutefois en être une, ce que l'on peut vérifier par observation graphique.