

Exercice 01

Le projeté orthogonal de C sur (AB) est B.

Donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AB = AB^2$$

$$\text{donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$$

L'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ est un angle droit.

$$\text{donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

Les diagonales d'un carré étant perpendiculaires,

l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ est un angle droit,

$$\text{donc } \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont colinéaires et de même sens,

$$\text{donc } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} = AC \times AO$$

On sait que dans un carré de côté a , la diagonale a pour longueur $a\sqrt{2}$

De plus O est le milieu de [AC], donc $AO = a \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} = a\sqrt{2} \times a \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{donc } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} = a^2$$

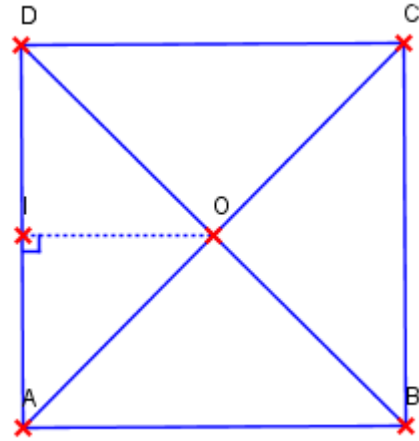
Les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires et de sens contraire,

$$\text{donc } \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = -OC \times OA = -a \frac{\sqrt{2}}{2} \times a \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{donc } \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}a^2$$

Le point O a pour projeté orthogonal sur (AD) le milieu I de [AD].

Le point B a pour projeté orthogonal sur (AD) le point A.

$$\text{donc } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OB} = -AD \times IA = -a \times \frac{1}{2}a \quad \text{donc } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}a^2$$



Exercice 02

Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA).

- Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$

Dans le triangle rectangle OBH on peut écrire :

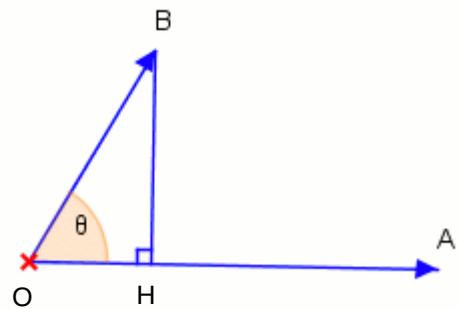
$$OH = OB \cos \theta$$

$$\text{Donc } OH = 3 \cos \frac{\pi}{3} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ étant de même sens,

$$\text{on a } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OH = 5 \times \frac{3}{2}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{15}{2}$$



- Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$

Dans le triangle rectangle OBH on peut écrire :

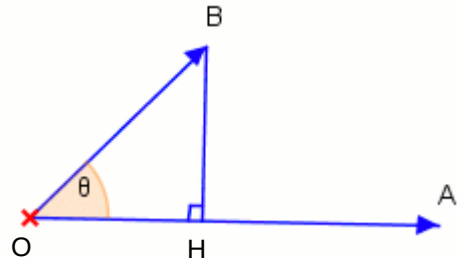
$$OH = OB \cos \theta$$

$$\text{Donc } OH = 3 \cos \frac{\pi}{4} = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ étant de même sens,

$$\text{on a } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OH = 5 \times \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$



- Pour $\theta = \frac{5\pi}{6}$

Dans le triangle rectangle OBH on peut écrire :

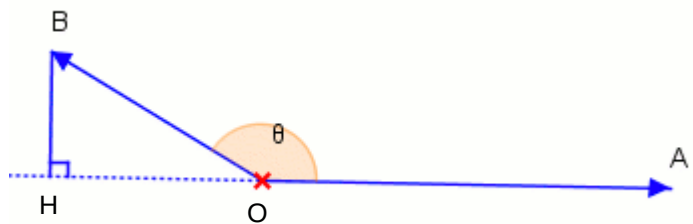
$$OH = OB \cos (\pi - \theta)$$

$$\text{Donc } OH = 3 \cos \frac{\pi}{6} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ étant de sens contraire,

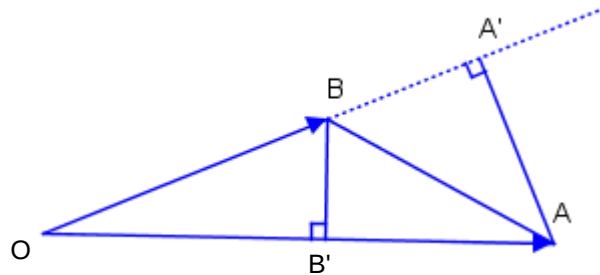
$$\text{on a } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = - OA \times OH = - 5 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = - \frac{15\sqrt{3}}{2}$$



Exercice 03

Si l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est un angle aigu.

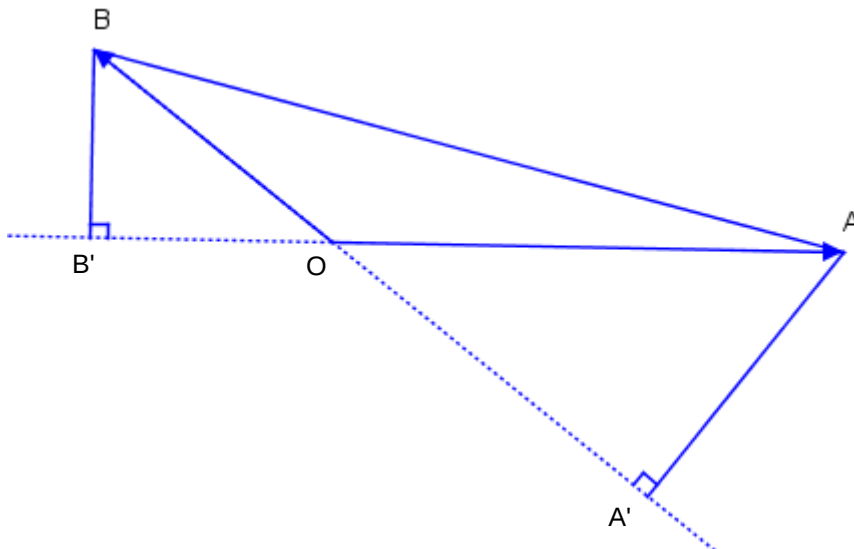


B' étant le projeté orthogonal de B sur (OA) , on a $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB'$

A' étant le projeté orthogonal de A sur (OB) , on a $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = OB \times OA'$

Comme on sait que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$, on en déduit que $OA' \times OB = OA \times OB'$

Si l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est un angle obtus



B' étant le projeté orthogonal de B sur (OA) , on a $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = - OA \times OB'$

A' étant le projeté orthogonal de A sur (OB) , on a $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = - OB \times OA'$

Comme on sait que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$, on en déduit que $- OA' \times OB = - OA \times OB'$
Donc $OA' \times OB = OA \times OB'$

Si l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est un angle droit, on a $B' = O$ et $A' = O$
Donc $OA' \times OB = 0$ et $OA \times OB' = 0$ donc $OA' \times OB = OA \times OB'$

Dans tous les cas on a donc $OA' \times OB = OA \times OB'$.

Exercice 04

1) $AB = 3$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \cos \widehat{BAC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = 3 \times 5 \times \cos \frac{\pi}{6} = 15 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$

2) $AB = 1$, $AC = 2$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{2\pi}{3}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1 \times 2 \times \cos \frac{2\pi}{3} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1$

3) $BA = 2$, $CA = 2$ et $\widehat{CAB} = \frac{3\pi}{4}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \cos \widehat{BAC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = BA \times CA \times \cos \widehat{CAB} = 2 \times 2 \times \cos \frac{3\pi}{4} = 4 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2\sqrt{2}$

4) $BA = 3$, $CA = \sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{4}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = BA \times CA \times \cos[(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) + \pi]$$

$$\text{donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -BA \times CA \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = -3 \times \sqrt{2} \times \cos \frac{\pi}{4} = -3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3$

Exercice 05

Le triangle ABC étant équilatéral, le milieu C' de [AB] est aussi le pied de la hauteur issue de C, donc le projeté orthogonal de C sur (AB).

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}$ sont de même sens,

$$\text{donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC' = a \times \frac{a}{2}$$

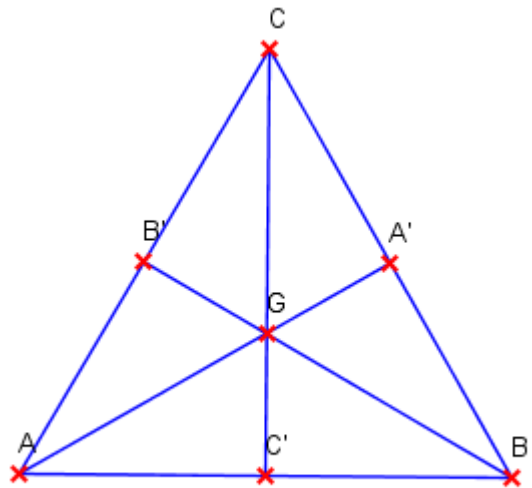
$$\text{donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$$

A' est le projeté orthogonal de G sur (BC).

$\overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont de même sens,

$$\text{donc } \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BC} = BA' \times BC = \frac{a}{2} \times a$$

$$\text{donc } \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$$



A' est le projeté orthogonal de B sur (AG).

$\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GA'}$ sont de sens contraire, donc $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GA} = -GA \times GA'$

G étant le centre de gravité du triangle ABC, on a $GA' = \frac{1}{3} AA'$ et $GA = \frac{2}{3} AA'$.

De plus (AA') étant la hauteur du triangle équilatéral ABC, on a $AA' = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

$$\text{Donc } GA' = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{6} a \quad \text{et} \quad GA = \frac{2}{3} AA' = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a.$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{\sqrt{3}}{3} a \times \frac{\sqrt{3}}{6} a \quad \text{donc } \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{a^2}{6}$$

C est sur la droite (BA') et A' est le projeté orthogonal de A sur (BA'),

$\overrightarrow{A'C}$ et $\overrightarrow{BA'}$ sont de même sens, donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA'} = A'C \times BA' = \frac{1}{2} a \times \frac{1}{2} a$

$$\text{donc } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA'} = \frac{a^2}{4}$$

$$\text{On a } (\overrightarrow{GA'}, \overrightarrow{GB'}) = \frac{2\pi}{3} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{GA'} \cdot \overrightarrow{GB'} = GA' \times GB' \times \cos(\overrightarrow{GA'}, \overrightarrow{GB'}) = \frac{\sqrt{3}}{6} a \times \frac{\sqrt{3}}{6} a \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{GA'} \cdot \overrightarrow{GB'} = -\frac{a^2}{24}$$

Exercice 06

1°) Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ étant orthonormal, on a

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 + 1 \times (-6) = 6 - 6 \quad \text{donc} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

On peut en déduire que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2°) Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ étant orthonormal, on a

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 2 \times 1 + 1 \times 3 = 2 + 3 \quad \text{donc} \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = 5$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} \quad \text{donc} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} \quad \text{donc} \quad \|\vec{w}\| = \sqrt{10}$$

On sait que $\vec{u} \cdot \vec{w} = \|\vec{u}\| \|\vec{w}\| \cos(\vec{u}; \vec{w})$

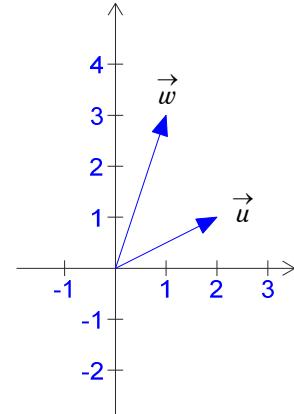
$$\text{Donc} \quad 5 = \sqrt{5} \sqrt{10} \cos(\vec{u}; \vec{w})$$

$$\text{donc} \quad \cos(\vec{u}; \vec{w}) = \frac{5}{\sqrt{5} \sqrt{10}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \cos(\vec{u}; \vec{w}) = \frac{5}{5\sqrt{2}}$$

$$\text{On obtient} \quad \cos(\vec{u}; \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{On en déduit que} \quad (\vec{u}; \vec{w}) = \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad \text{ou} \quad (\vec{u}; \vec{w}) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{Un dessin permet de voir que} \quad (\vec{u}; \vec{w}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$



Exercice 07

On a $A(1; -1)$ $B(3; 3)$ $C(-4; 4)$ $D(2; 1)$

donc $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(3 - 1; 3 + 1) = (2; 4)$

et $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $(2 + 4; 1 - 4) = (6; -3)$

Le repère étant orthonormal, on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2 \times 6 + 4 \times (-3) = 12 - 12 = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

On en déduit que : les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 08

1) Première méthode :

La médiatrice de $[AB]$ est la droite passant par le milieu I de $[AB]$ et perpendiculaire à (AB) , c'est-à-dire

l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{IM}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

A et B ayant pour coordonnées $(1 ; 2)$ et $(3 ; -5)$,

I a pour coordonnées $x_I = \frac{1+3}{2} = 2$ et $y_I = \frac{2-5}{2} = -\frac{3}{2}$

Si M a pour coordonnées $(x ; y)$, le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées $(x - 2 ; y + \frac{3}{2})$

D'autre part le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(3 - 1 ; -5 - 2) = (2 ; -7)$

Le repère étant orthonormal on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IM} \text{ orthogonal à } \overrightarrow{AB} &\Leftrightarrow (x - 2) \times 2 + \left(y + \frac{3}{2}\right) \times (-7) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 - 7y - \frac{21}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 7y - \frac{29}{2} = 0 \Leftrightarrow 4x - 14y - 29 = 0\end{aligned}$$

Donc la médiatrice de (AB) a pour équation $4x - 14y - 29 = 0$

Deuxième méthode :

La médiatrice de $[AB]$ est l'ensemble des points M équidistants de A et B .

Si M a pour coordonnées $(x ; y)$, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x - 1 ; y - 2)$ et le vecteur $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $(x - 3 ; y + 5)$

Le repère étant orthonormal on a :

$$\begin{aligned}AM = BM &\Leftrightarrow AM^2 = BM^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 3)^2 + (y + 5)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 \Leftrightarrow 4x - 14y - 29 = 0\end{aligned}$$

Donc la médiatrice de (AB) a pour équation $4x - 14y - 29 = 0$

2) La droite passant par $C(0 ; 3)$ et perpendiculaire à (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{CM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

Si M a pour coordonnées $(x ; y)$, le vecteur $\overrightarrow{CM}$ a pour coordonnées $(x ; y - 3)$

Le repère étant orthonormal on a :

$$\overrightarrow{CM} \text{ orthogonal à } \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow x \times 2 + (y - 3) \times (-7) = 0 \Leftrightarrow 2x - 7y + 21 = 0$$

La droite passant par $C(0 ; 3)$ et perpendiculaire à (AB) a pour équation $2x - 7y + 21 = 0$.

Exercice 09

1°) A, B et C ayant pour coordonnées respectives $(-3; -1)$, $(2; 1)$ et $(1; 4)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2 + 3; 1 + 1) = (5; 2)$

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(1 + 3; 4 + 1) = (4; 5)$

Le repère étant orthonormal on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 4 + 2 \times 5 \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 30.$$

On sait d'autre part que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

$$\text{avec } AB = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \quad \text{et} \quad AC = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

L'égalité $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ donne donc

$$30 = \sqrt{29} \times \sqrt{41} \times \cos \widehat{BAC}$$

$$\text{Donc } \cos \widehat{BAC} = \frac{30}{\sqrt{29} \times \sqrt{41}} \quad \text{donc} \quad \cos \widehat{BAC} \approx 0,87$$

On en déduit en utilisant une calculatrice que $\widehat{BAC} \approx 29,54^\circ$



```
cos^-1 0.87
29.5413605
```

2°) Le vecteur $\overrightarrow{CB}$ a pour coordonnées $(2 - 1; 1 - 4) = (1; -3)$

Le vecteur $\overrightarrow{CA}$ a pour coordonnées $(-4; -5)$

$$\text{On a donc } \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 1 \times (-4) + (-3) \times (-5) = -4 + 15 = 11$$

$$CB = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10} \quad \text{et} \quad CA = \sqrt{41}$$

On sait que $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = CB \times CA \times \cos \widehat{ACB}$

$$\text{Donc } 11 = \sqrt{10} \times \sqrt{41} \times \cos \widehat{ACB}$$

$$\text{donc } \cos \widehat{ACB} = \frac{11}{\sqrt{10} \times \sqrt{41}} \quad \text{donc} \quad \cos \widehat{ACB} \approx 0,5433$$

On en déduit en utilisant une calculatrice que $\widehat{ACB} \approx 57,09^\circ$



```
cos^-1 0.5433
57.09143203
```

Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(-1; 3)$

Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées $(-5; -2)$

$$\text{On a donc } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = -1 \times (-5) + 3 \times (-2) = 5 - 6 = -1$$

$$BC = \sqrt{10} \quad \text{et} \quad BA = \sqrt{29}$$

On sait que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = BC \times BA \times \cos \widehat{CBA}$

$$\text{Donc } -1 = \sqrt{10} \times \sqrt{29} \times \cos \widehat{CBA}$$

$$\text{donc } \cos \widehat{CBA} = \frac{-1}{\sqrt{10} \times \sqrt{29}} \quad \text{donc} \quad \cos \widehat{CBA} \approx -0,0587$$

On en déduit en utilisant une calculatrice que $\widehat{CBA} \approx 93,37^\circ$



```
cos^-1 -0.0587
93.36519672
```

On peut vérifier en calculant la somme des mesures des trois angles : $29,54 + 57,09 + 93,37 = 180$

Exercice 10

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} \\&= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} \\&= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} \\&= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} \\&= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}) \\&= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) \\&= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} \\&= \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) \\&= \overrightarrow{CB} \cdot \vec{0}\end{aligned}$$

On obtient donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Exercice 11

Le repère étant orthonormal on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = k \times (2k - 1) + (-5) \times (k + 4) = 2k^2 - k - 5k - 20 = 2k^2 - 6k - 20$$

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 6k - 20 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 3k - 10 = 0$$

L'équation du second degré $k^2 - 3k - 10 = 0$ a pour discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 9 + 40 = 49$
 $\Delta > 0$, donc l'équation a deux solutions qui sont :

$$k_1 = \frac{3 - \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{3 - 7}{2} = -2 \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{3 + \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{3 + 7}{2} = 5$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux pour $k = -2$ ou $k = 5$.

Exercice 12

1) I étant le milieu de $[AB]$, on sait que pour, tout point M on a $MA^2 + MB^2 = 2 MI^2 + \frac{1}{2} AB^2$

$$\text{On a donc} \quad MA^2 + MB^2 = 26 \Leftrightarrow 2 MI^2 + \frac{1}{2} AB^2 = 26$$

Comme $AB = 4$ on en déduit :

$$MA^2 + MB^2 = 26 \Leftrightarrow 2 MI^2 + \frac{1}{2} \times 16 = 26 \Leftrightarrow 2 MI^2 = 18 \Leftrightarrow MI^2 = 9 \Leftrightarrow MI = 3$$

On en déduit que : l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 26$ est le cercle de centre I milieu de $[AB]$ et de rayon 3.

2) De la même façon on peut écrire :

$$MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow 2 MI^2 + \frac{1}{2} AB^2 = k \Leftrightarrow 2 MI^2 = k - 8$$

- Si $k < 8$ on a $k - 8 < 0$ et l'équation $2 MI^2 = k - 8$ n'a pas de solution puisque $2 MI^2 \geq 0$
L'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$ est l'ensemble vide.

- Si $k = 8$ on a $k - 8 = 0$
alors $2 MI^2 = k - 8 \Leftrightarrow 2 MI^2 = 0 \Leftrightarrow MI^2 = 0 \Leftrightarrow MI = 0 \Leftrightarrow M = I$
L'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$ est l'ensemble réduit au seul point I milieu de $[AB]$

- Si $k > 8$ on a $k - 8 > 0$
alors $2 MI^2 = k - 8 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{k - 8}{2} \Leftrightarrow MI = \sqrt{\frac{k - 8}{2}}$

L'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$ est le cercle de centre I milieu de $[AB]$ et de rayon $\sqrt{\frac{k - 8}{2}}$.

Exercice 13

ABC est un triangle tel que $AB = 3$ $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = 22^\circ$

En utilisant le théorème d'Al-Kashi on peut écrire :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = 3^2 + 8^2 - 2 \times 3 \times 8 \times \cos 22^\circ$$

On obtient $BC^2 \approx 28,49$ donc $BC \approx 5,34$

Le théorème d'Al-Kashi donne aussi

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos \widehat{ACB}$$

$$\text{donc } \cos \widehat{ACB} = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \times AC \times BC} . \text{ On obtient } \cos \widehat{ACB} \approx \frac{64 + 28,49 - 9}{2 \times 8 \times 5,34} \text{ donc } \cos \widehat{ACB} \approx 0,977$$

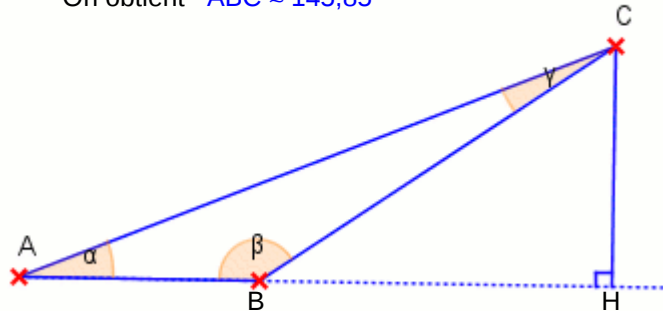
On en déduit en utilisant une calculatrice que $\widehat{ACB} \approx 12,26^\circ$

NB : cette valeur est une valeur approchée dont la précision dépend des arrondis effectués sur les valeurs de BC^2 et de BC .

On peut obtenir une valeur approchée plus précise en limitant les erreurs et on obtient $\widehat{ACB} \approx 12,15^\circ$

On peut déterminer une valeur approchée de la mesure du troisième angle du triangle en utilisant une nouvelle fois le théorème d'Al-Kashi ou en utilisant la propriété de la somme des angles d'un triangle.

On obtient $\widehat{ABC} \approx 145,85^\circ$



L'aire du triangle ABC peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{A} = \frac{AB \times CH}{2} \text{ où } H \text{ est le pied de la hauteur issue de } C.$$

Dans le triangle ACH rectangle en H, on peut écrire

$$CH = AC \times \sin \widehat{BAC}$$

$$\text{On en déduit que } \mathcal{A} = \frac{AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}}{2}$$

et on obtient $\mathcal{A} \approx 4,50$

Exercice 14

Sachant que $\widehat{BAC} = 22^\circ$ et $\widehat{ABC} = 43^\circ$ on en déduit que $\widehat{ACB} = 180^\circ - 22^\circ - 43^\circ = 115^\circ$

$$\text{On sait que } \frac{\sin \widehat{ACB}}{AB} = \frac{\sin \widehat{ABC}}{AC} = \frac{\sin \widehat{BAC}}{BC}$$

$$\text{Donc } AC = \frac{\sin \widehat{ABC} \times AB}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{\sin 43^\circ \times 3}{\sin 115^\circ} \text{ donc } AC \approx 2,26$$

$$\text{et } BC = \frac{\sin \widehat{BAC} \times AB}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{\sin 22^\circ \times 3}{\sin 115^\circ} \text{ donc } BC \approx 1,24$$

Exercice 15

On a $\widehat{CAB} = 11,9^\circ$ et $\widehat{ACB} = 67,1^\circ$

La somme des angles d'un triangle est égale à 180° .

On a $180 - 11,9 - 67,1 = 101$

Donc $\widehat{ABC} = 101^\circ$

On sait que

$$\frac{\sin \widehat{ABC}}{AC} = \frac{\sin \widehat{CAB}}{BC} = \frac{\sin \widehat{ACB}}{AB}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sin 101^\circ}{1} = \frac{\sin 11,9^\circ}{BC} = \frac{\sin 67,1^\circ}{AB}$$

On en déduit que :

$$AB = \frac{\sin 67,1^\circ}{\sin 101^\circ} \approx 0,938$$

et

$$BC = \frac{\sin 11,9^\circ}{\sin 101^\circ} \approx 0,210$$

La distance AB est d'environ 938 mètres et la distance BC d'environ 210 mètres.

Dans le triangle ABC, soit H le pied de la hauteur issue de B.

La plus petite distance de la plage à la base du phare est la distance BH.

On a $BH = AB \sin \widehat{CAB}$ donc $BH \approx 0,938 \times \sin 11,9^\circ \approx 0,193$

La plus petite distance de la plage à la base du phare est d'environ 193 mètres.

Le phare étant vertical, le triangle BCP est rectangle en B.

On a donc $\frac{BP}{BC} = \tan \widehat{BCP}$ donc $BP = BC \tan \widehat{BCP}$ donc $BP \approx 0,210 \times \tan 8,1^\circ \approx 0,030$

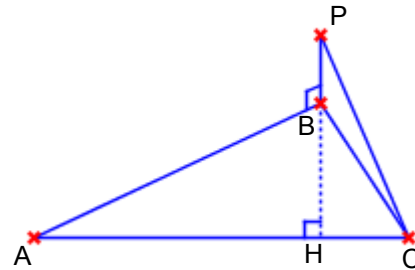
La hauteur du phare est donc d'environ 30 mètres.

Le triangle BAP est rectangle en B.

On a donc $\tan \widehat{BAP} = \frac{BP}{BA}$ donc $\tan \widehat{BAP} \approx \frac{0,030}{0,938} \approx 0,032$

En utilisant une calculatrice on en déduit $\widehat{BAP} \approx 1,8^\circ$

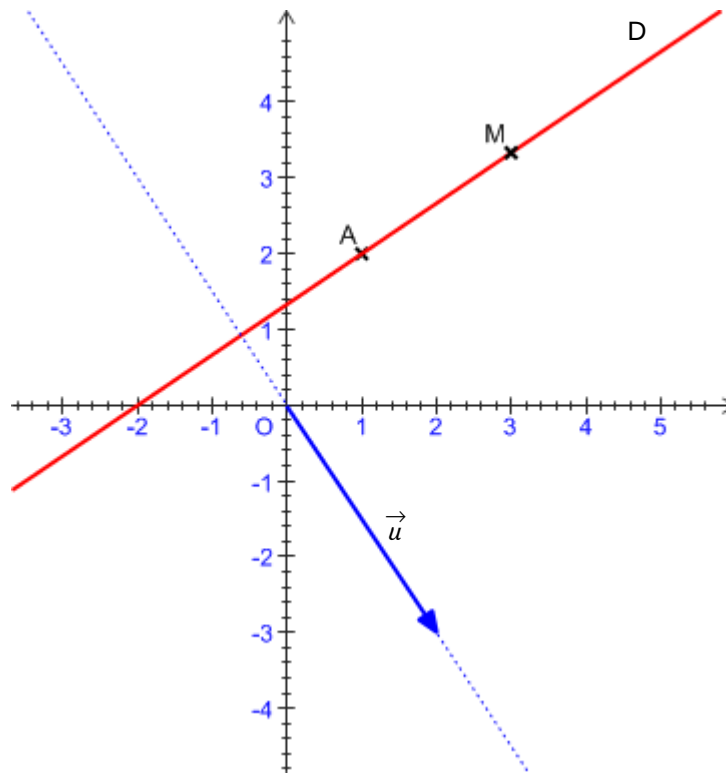
La mesure de l'angle $\widehat{BAP}$ doit donner environ $1,8^\circ$.



$$\tan^{-1} 0.032$$

$$1.832839506$$

19)

Exercice 16

2°) Soit M un point de coordonnées $(x ; y)$ Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x - 1 ; y - 2)$

Le repère étant orthonormal et le vecteur u ayant pour coordonnées $(2 ; -3)$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{AM} \perp \vec{u} \Leftrightarrow (x - 1) \times 2 + (y - 2) \times (-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 - 3y + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 4 = 0$$

Cette équation est l'équation d'une droite. Donc D est la droite d'équation $2x - 3y + 4 = 0$.

Exercice 17

1°) A et B ont pour coordonnées respectives $(1 ; 2)$ et $(4 ; -2)$. Soit $M(x ; y)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x - 1 ; y - 2)$

Le vecteur $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $(x - 4 ; y + 2)$

Le repère étant orthonormal, on a $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (x - 1) \times (x - 4) + (y - 2) \times (y + 2)$

On a donc : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - x + 4 + y^2 - 4 = 0$

c'est-à-dire : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + y^2 = 0$

2°) $x^2 - 5x$ a pour forme canonique $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

Donc $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$

Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

Donc : le cercle C de diamètre [AB] a pour équation : $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$.

3°) Le repère étant orthonormal on a $AB = \sqrt{(4 - 1)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$
donc $AB = 5$.

Le milieu I de [AB] a pour coordonnées $x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 4}{2} = \frac{5}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 - 2}{2} = 0$

Donc : le milieu I de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2} ; 0\right)$.

Le cercle C de diamètre [AB] a pour centre I et pour rayon $\frac{AB}{2} = \frac{5}{2}$

Son équation est donc $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$ c'est-à-dire $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$.

Exercice 18

1°) On a $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OB}, \vec{i}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = -(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OA}) - (\vec{i}, \overrightarrow{OB})$

Comme A et B ont pour coordonnées polaires $(1 ; a)$ et $(1 ; b)$ dans le repère polaire $(O; \vec{i})$, on en déduit que :

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = a - b$$

On a $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = OB \times OA \times \cos(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$

Comme A et B ont pour coordonnées polaires $(1 ; a)$ et $(1 ; b)$, on a $OA = 1$ et $OB = 1$.

Donc $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \cos(a - b)$.

2°) Comme A et B ont pour coordonnées polaires $(1 ; a)$ et $(1 ; b)$ dans le repère polaire $(O; \vec{i})$, les coordonnées cartésiennes de A et B dans le repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont données par :

$$x_A = 1 \times \cos a ; y_A = 1 \times \sin a ; x_B = 1 \times \cos b ; y_B = 1 \times \sin b$$

On en déduit que

A a pour coordonnées $(\cos a ; \sin a)$ et B a pour coordonnées $(\cos b ; \sin b)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ étant orthonormal, on a donc :

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \cos b \times \cos a + \sin b \times \sin a$$

3°) On a donc $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \cos(a - b)$ et $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$

Donc $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

4°) La relation $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ est vraie pour tous les réels a et b , on peut donc l'utiliser avec les réels a et $(-b)$.

On obtient alors :

$$\cos[a - (-b)] = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)$$

On sait que $\cos(-b) = \cos b$ et $\sin(-b) = -\sin b$

On en déduit alors : $\cos[a - (-b)] = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Donc $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

5°) La relation $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ est vraie pour tous les réels a et b , on peut donc l'utiliser avec $\frac{\pi}{2} - a$ et b .

On obtient : $\cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b$

c'est-à-dire $\cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b$

On sait que pour tout réel x on a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

Donc $\cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] = \sin(a + b)$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$

On en déduit que : $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

La relation $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ est vraie pour tous les réels a et b , on peut donc l'utiliser avec $\frac{\pi}{2} - a$ et b .

On obtient : $\cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b$

c'est-à-dire $\cos\left[\frac{\pi}{2} - (a - b)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b$

On sait que pour tout réel x on a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

Donc $\cos\left[\frac{\pi}{2} - (a - b)\right] = \sin(a - b)$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$

On en déduit que : $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Exercice 19

A a pour coordonnées $(3 ; -2)$. Soit $M(x ; y)$, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x - 3 ; y + 2)$.
On sait que $\vec{u}$ a pour coordonnées $(-1 ; 3)$.

Le repère étant orthonormal, on a $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = (x - 3) \times (-1) + (y + 2) \times 3 = -x + 3 + 3y + 6 = -x + 3y + 9$
On en déduit que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 21 \Leftrightarrow -x + 3y + 9 = 21 \Leftrightarrow -x + 3y - 12 = 0$$

Donc Δ a pour équation : $-x + 3y - 12 = 0$.

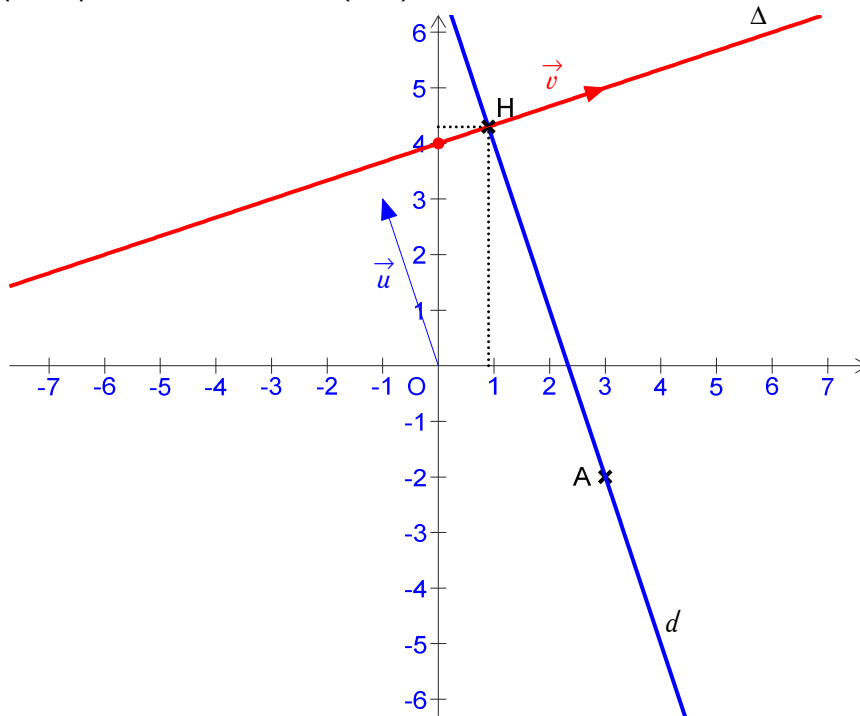
Δ a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$

On en déduit que : Δ est une droite.

On sait que Δ a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(3 ; 1)$

Pour $x = 0$ l'équation $-x + 3y - 12 = 0$ donne $y = 4$.

Donc Δ passe par le point de coordonnées $(0 ; 4)$.



La droite Δ ayant pour équation $-x + 3y - 12 = 0$, on sait qu'elle a pour vecteur normal le vecteur de coordonnées $(-1 ; 3)$ c'est-à-dire le vecteur $\vec{u}$.

La droite d a pour vecteur directeur $\vec{u}$, donc d et Δ sont perpendiculaires.

d étant perpendiculaire à Δ , d a pour vecteur normal le vecteur $\vec{v}$ $(3 ; 1)$.

Son équation est donc de la forme : $3x + y + c = 0$.

On sait que d passe par A, donc les coordonnées de A vérifient l'équation de d .

Donc $3 \times 3 + (-2) + c = 0$ c'est-à-dire $c = -7$.

Donc d a pour équation $3x + y - 7 = 0$.

Le point d'intersection de d et de Δ est le point dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient le système formé par les équations de d et de Δ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} -x + 3y - 12 = 0 \\ 3x + y - 7 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 12 \\ 3(3y - 12) + y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 12 \\ 10y - 43 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 12 \\ y = \frac{43}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \times \frac{43}{10} - 12 \\ y = \frac{43}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{10} \\ y = \frac{43}{10} \end{cases} \end{aligned}$$

d et de Δ ont pour intersection le point H de coordonnées $(\frac{9}{10} ; \frac{43}{10})$.

Exercice 20

Δ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

On sait que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

Donc : Δ est la droite passant par A et perpendiculaire à (AB).

Δ' est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -18$

Soit H un point de la droite (AB). On peut écrire $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AB}$

H appartient à Δ' $\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = -18 \Leftrightarrow \lambda \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = -18 \Leftrightarrow \lambda AB^2 = -18$

On sait que $AB = 3$ donc $AB^2 = 9$

On ne déduit : H appartient à Δ' $\Leftrightarrow 9\lambda = -18 \Leftrightarrow \lambda = -2$

Donc : le point H défini par $\overrightarrow{AH} = -2 \overrightarrow{AB}$ est un point de la droite (AB) appartenant à Δ' .

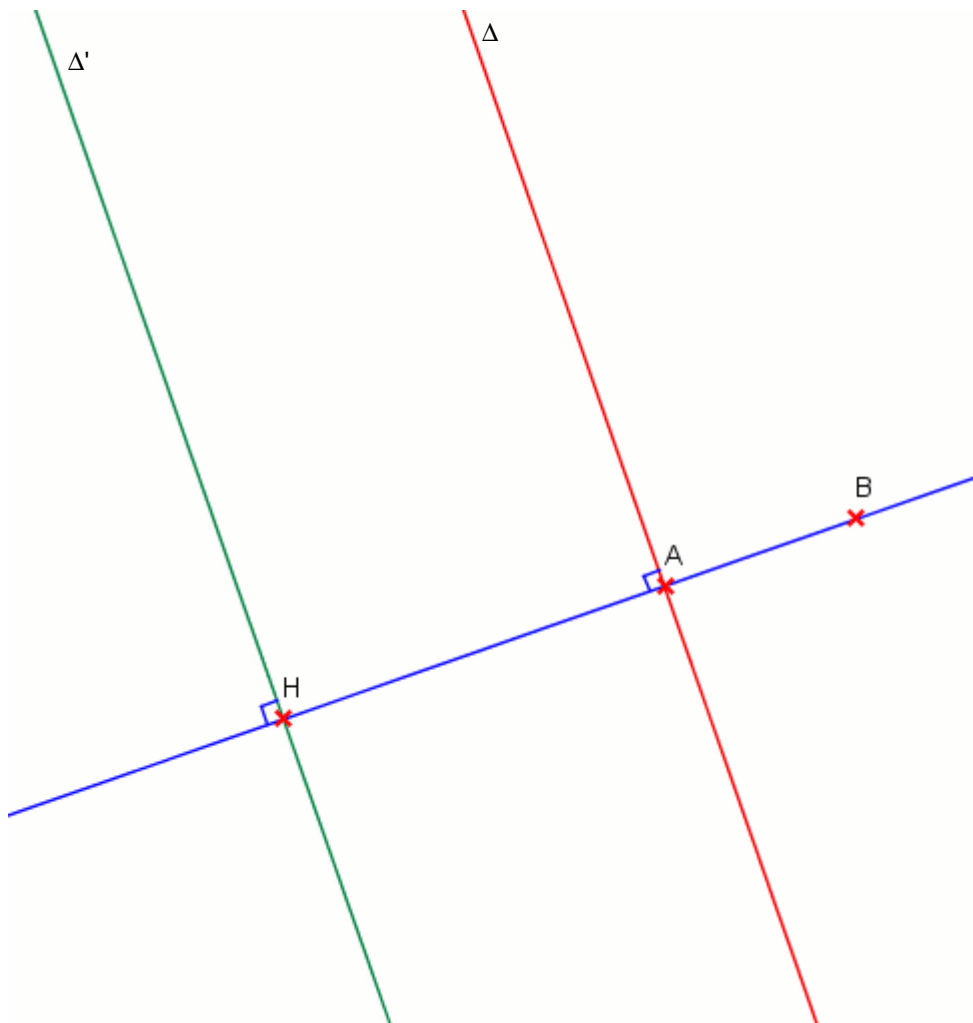
Pour tout point M on peut alors écrire :

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -18 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \overrightarrow{AB} = -18 \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = -18$

On sait que H appartient à Δ' , donc $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = -18$.

On en déduit que : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -18 \Leftrightarrow -18 + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = -18 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \perp \overrightarrow{AB}$

Donc : Δ' est la droite passant par H et perpendiculaire à (AB).



Exercice 21

1) Δ est l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 17$.

Soit I le milieu de $[AB]$.

Le théorème de la médiane permet d'écrire pour tout point M : $MA^2 + MB^2 = 2 MI^2 + \frac{1}{2} AB^2$

On sait que $AB = 5$, donc $AB^2 = 25$. Pour tout point M on peut alors écrire :

$$MA^2 + MB^2 = 17 \Leftrightarrow 2 MI^2 + \frac{1}{2} AB^2 = 17 \Leftrightarrow 2 MI^2 + \frac{25}{2} = 17 \Leftrightarrow 2 MI^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow MI^2 = \frac{9}{4}$$

Donc Δ est le cercle de centre I milieu de $[AB]$ et de rayon $\frac{3}{2}$.

2) Δ' est l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 0$

Pour tout point M on peut écrire :

$$MA^2 - MB^2 = 0 \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow M \text{ est équidistant de A et B}$$

On en déduit que

Δ' est l'ensemble des points équidistants de A et B, donc Δ' est la médiatrice de $[AB]$.

3) Δ'' est l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = -75$.

Cherchons un point H de (AB) appartenant à Δ'' .

Si H est un point de (AB) , on peut écrire $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AB}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et par conséquent $AH^2 = \lambda^2 AB^2$

D'autre part $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AB} = (\lambda - 1)\overrightarrow{AB}$, donc $BH^2 = (\lambda - 1)^2 AB^2$

$$\text{Alors : } HA^2 - HB^2 = -75 \Leftrightarrow \lambda^2 AB^2 - (\lambda - 1)^2 AB^2 = -75$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 AB^2 - (\lambda^2 - 2\lambda + 1)AB^2 = -75 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)AB^2 = -75$$

On sait que $AB = 5$ donc $AB^2 = 25$. On en déduit :

$$HA^2 - HB^2 = -75 \Leftrightarrow (2\lambda - 1) \times 25 = -75 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = -3 \Leftrightarrow 2\lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

H tel que $\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB}$ (c'est-à-dire le symétrique de B par rapport à A) est donc un point de Δ'' .

Pour tout point M on peut alors écrire :

$$MA^2 - MB^2 = -75 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = -75 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})^2 - (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})^2 = -75$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MH}^2 + 2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA}^2 - \overrightarrow{MH}^2 - 2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HB}^2 = -75$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HA} + HA^2 - 2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HB} - HB^2 = -75$$

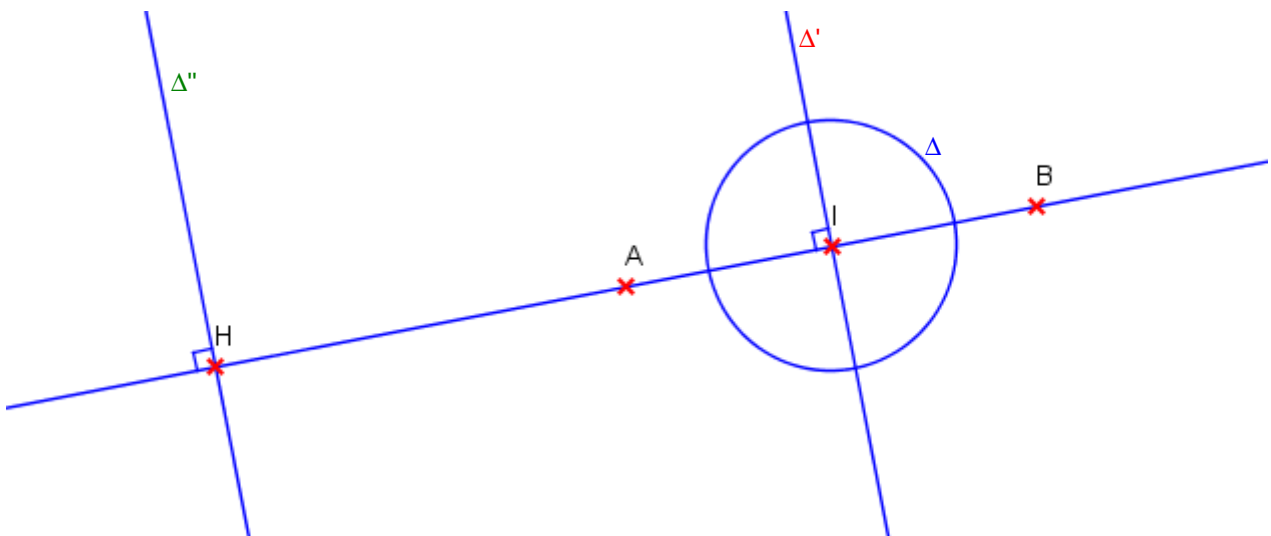
On sait que H est un point de Δ'' , donc il vérifie $HA^2 - HB^2 = -75$

On en déduit alors :

$$MA^2 - MB^2 = -75 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HA} - 2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HB} - 75 = -75 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MH} \cdot (\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MH} \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{BH}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{BA}$$

Donc : Δ'' est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H (symétrique de B par rapport à A).



Exercice 22

1°) Soit M un point de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

A et B ayant pour coordonnées $(1; 3)$ et $(4; -1)$ et le repère étant orthonormal, on a :

$$MA^2 = (1 - x)^2 + (3 - y)^2 \quad \text{et} \quad MB^2 = (4 - x)^2 + (-1 - y)^2$$

Donc :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 = 17 &\Leftrightarrow (1 - x)^2 + (3 - y)^2 + (4 - x)^2 + (-1 - y)^2 = 17 \\ &\Leftrightarrow 1 - 2x + x^2 + 9 - 6y + y^2 + 16 - 8x + x^2 + 1 + 2y + y^2 = 17 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 2y^2 - 4y + 27 = 17 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 2y^2 - 4y = -10 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + y^2 - 2y = -5 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + (y - 1)^2 - 1 = -5 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Δ a pour équation $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$.

Donc Δ est le cercle de centre I $\left(\frac{5}{2}; 1\right)$ et de rayon $\frac{3}{2}$.

NB : On peut remarquer que le centre I est le milieu de $[AB]$.

$$\begin{aligned} 2^\circ) MA^2 - MB^2 = 0 &\Leftrightarrow (1 - x)^2 + (3 - y)^2 - (4 - x)^2 - (-1 - y)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - 2x + x^2 + 9 - 6y + y^2 - 16 + 8x - x^2 - 1 - 2y - y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 6x - 8y - 7 = 0 \end{aligned}$$

Δ' a pour équation $6x - 8y - 7 = 0$.

Donc : Δ' est la droite d'équation $6x - 8y - 7 = 0$.

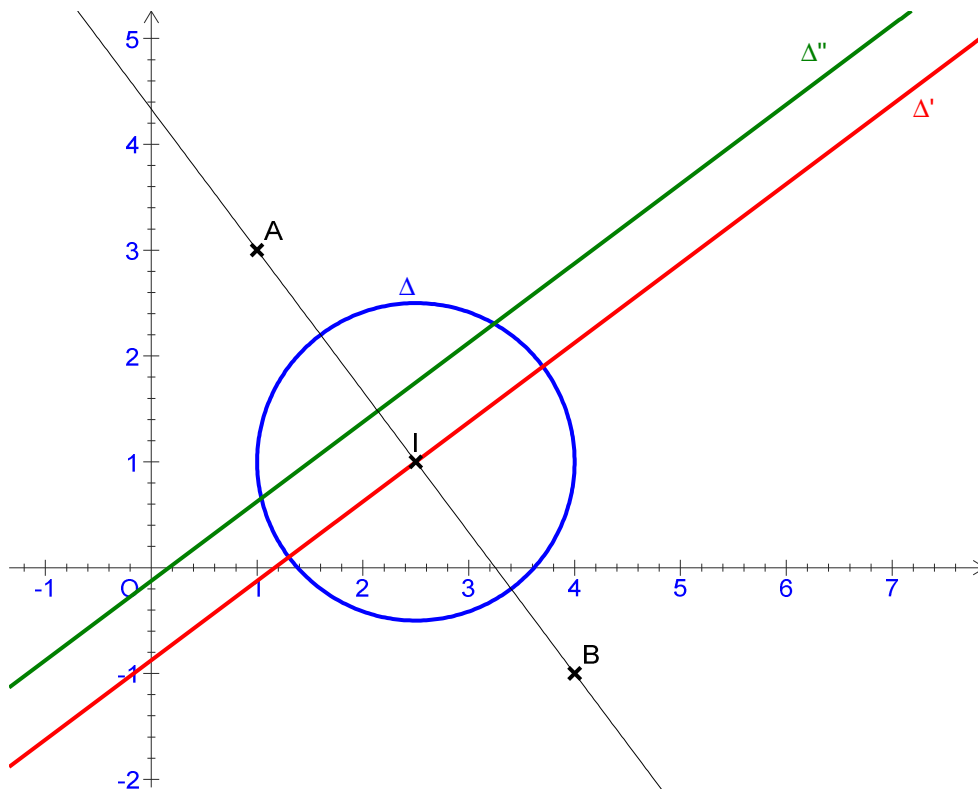
NB : On pourrait remarquer que Δ' est la médiatrice de $[AB]$.

$$3^\circ) MA^2 - MB^2 = -6 \Leftrightarrow 6x - 8y - 7 = -6 \Leftrightarrow 6x - 8y - 1 = 0 \quad (\text{en utilisant les calculs du } 2^\circ)$$

Δ'' a pour équation $6x - 8y - 1 = 0$.

Donc Δ'' est la droite d'équation $6x - 8y - 1 = 0$.

NB : On pourrait remarquer que Δ'' est parallèle à Δ' , donc perpendiculaire à Δ .



Exercice 23

1°) La droite d a pour équation $ax + by + c = 0$ dans un repère orthonormal, on sait alors que : d a pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}(a; b)$.

2°) H étant le projeté orthogonal de A sur d , le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\vec{n}$.

Donc $\overrightarrow{AH} = \lambda \vec{n}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

A et H ayant pour coordonnées respectives $(x_0; y_0)$ et $(x_1; y_1)$, on en déduit que :

$$\begin{cases} x_1 - x_0 = \lambda a \\ y_1 - y_0 = \lambda b \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x_1 = x_0 + \lambda a \\ y_1 = y_0 + \lambda b \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

3°) On sait que H appartient à la droite d , donc les coordonnées de H vérifient l'équation de d .

Donc $ax_1 + by_1 + c = 0$ c'est-à-dire $a(x_0 + \lambda a) + b(y_0 + \lambda b) + c = 0$

donc $ax_0 + \lambda a^2 + by_0 + \lambda b^2 + c = 0$ c'est-à-dire $\lambda(a^2 + b^2) = -ax_0 - by_0 - c$

donc $\lambda = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$ (a et b n'étant pas tous deux nuls, on a nécessairement $a^2 + b^2 \neq 0$)

4°) On a $\overrightarrow{AH} = \lambda \vec{n}$ donc $AH = \|\lambda \vec{n}\| = |\lambda| \|\vec{n}\|$

Le repère étant orthonormal, le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a; b)$ a pour norme : $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

D'autre part $|\lambda| = \left| -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \right| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a^2 + b^2}$ (on a $a^2 + b^2 > 0$)

Donc $AH = |\lambda| \|\vec{n}\| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a^2 + b^2} \times \sqrt{a^2 + b^2}$ donc $AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

5°) • Si le point A est sur d , on a $H = A$, donc $AH = 0$

AH est la plus petite distance du point A à un point de d (une distance est toujours positive ou nulle).

• Si le point A n'est pas sur d , soit M un point de d distinct de H .

Le triangle AMH est rectangle en H et le théorème de Pythagore permet alors d'écrire :

$AM^2 = AH^2 + HM^2$, donc $AM^2 > AH^2$ donc $AM > AH$.

Donc AH est la plus petite distance du point A à un point de d .

Dans tous les cas : AH est la plus petite distance du point A à un point de d .

6°) Application : d est la droite d'équation $2x + 3y + 5 = 0$ et A a pour coordonnées $(4; 1)$.

la distance de A à la droite d est $d(A; d) = \frac{|2 \times 4 + 3 \times 1 + 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2}}$ donc $d(A; d) = \frac{16}{\sqrt{13}}$.

