Lycée Jacques Amyot **Année 2019-2020**

1ère Spécialité **Devoir**

Fonction exponentielle correction

▷ **Exercice 1.** Pour chaque question, cocher la bonne réponse :

		Réponse A	Réponse B	Réponse C
①	Pour tout réel x, e^{2x+4} est égal à :	☐ $\left(\mathrm{e}^{2x}\right)^2$	☑ $\left(\mathrm{e}^{x+2}\right)^2$	☐ $\mathrm{e}^4+\mathrm{e}^{2x}$
②	L'équation $\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{2x+1}$ admet sur $\mathbb{R}$:	☐ aucune solution	☑ une seule solution	☐ deux solutions
③	Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\mathrm{e}^x$. $f'(x)=$	☑ $(x+1)\mathrm{e}^x$	☐ e^x	☐ $x\mathrm{e}^x$
④	Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{2x+1}$. $f'(x)=$	☑ $2\mathrm{e}^{2x+1}$	☐ e^{2x+1}	☐ $(2x+1)\mathrm{e}^{2x+1}$

▷ **Exercice 2.** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2\mathrm{e}^x+3x+1$. Dresser le tableau de variation de f en justifiant avec soin.

$\forall\, x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2\mathrm{e}^x+3$. Or $\mathrm{e}^x>0$ donc $f'(x)>0$ d'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

▷ **Exercice 3.** Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\mathrm{e}^{-2x}+2x+1$. Dresser le tableau de variation de g en justifiant avec soin.

$\forall\, x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=-2\mathrm{e}^{-2x}+2$.

Étudions le signe de $g'(x)$:

$$\begin{aligned}
g'(x)>0 &\iff -2\mathrm{e}^{-2x}+2>0\\
&\iff -2\mathrm{e}^{-2x}>-2\\
&\iff \mathrm{e}^{-2x}<1\\
&\iff \mathrm{e}^{-2x}<\mathrm{e}^0\\
&\iff -2x<0\\
&\iff x>0
\end{aligned}$$

On en déduit les variations de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		↘	0	↗	

▷ **Exercice 4.** Un bien de consommation courante est soumis à l'offre et à la demande. La quantité demandée, en milliers d'unités, est donnée par : $f(x) = 400 \times \mathrm{e}^{-0,1x}$ pour un prix x en euros variant de 4€ à 10€.

1. Déterminer le sens de variation de f

$\forall\, x \in [\,4\,;\,10\,]$, $f'(x) = 400 \times (-0,1)\mathrm{e}^{-0,1x} = -40\mathrm{e}^{-0,1x} < 0$ ainsi f est strictement décroissante.

2. Expliquer, à l'aide du tableau de variations, pourquoi l'équation $f(x) = 200$ admet une solution unique sur l'intervalle $[\,4\,;\,10\,]$.

x	4	α	10
$f'(x)$		$-$	
f	268.13	200	147.15

f est strictement décroissante (et continue) sur l'intervalle $[\,4\,;\,10\,]$ et 200 est compris entre $f(4)$ et $f(10)$ donc l'équation $f(x) = 200$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[\,4\,;\,10\,]$.

3. A l'aide de la calculatrice, donner le prix arrondi à 0,01 près correspondant à une demande de 200 000 unités.

On obtient : $6,931 < \alpha < 6,932$ d'où $\alpha \approx 6,93$.

4. Montrer que pour tout réel t, $\dfrac{f(t+2) - f(t)}{f(t)}$ ne dépend pas de t. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

$\forall\, t \in [\,4\,;\,10\,]$,
$\dfrac{f(t+2) - f(t)}{f(t)} = \dfrac{400\mathrm{e}^{-0,1(t+2)} - 400\mathrm{e}^{-0,1t}}{400\mathrm{e}^{-0,1t}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-0,1t-0,2} - \mathrm{e}^{-0,1t}}{\mathrm{e}^{-0,1t}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-0,1t}(\mathrm{e}^{-0,2} - 1)}{\mathrm{e}^{-0,1t}} = \mathrm{e}^{-0,2} - 1 \approx -0,18$ donc le quotient ne dépend pas de t.

Lorsque le prix augmente de 2 €, la baisse de la demande est d'environ 18%.

▷ **Exercice 5.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 50x\mathrm{e}^{-0,5x+1}$ dont on donne la représentation graphique ci-dessous.

1. Montrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = (50 - 25x)\mathrm{e}^{-0,5x+1}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 50\mathrm{e}^{-0,5x+1} + 50x \times (-0,5)\mathrm{e}^{-0,5x+1} = 50\mathrm{e}^{-0,5x+1} - 25x\mathrm{e}^{-0,5x+1} = (50 - 25x)\mathrm{e}^{-0,5x+1}$

2. Dresser le tableau de variation de f. (*Penser à vérifier la cohérence avec le graphique*)

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-0,5x+1} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $50 - 25x$:

$50 - 25x > 0 \iff -25x > -50 \iff x < 2$

On en déduit :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	100	$\searrow$	

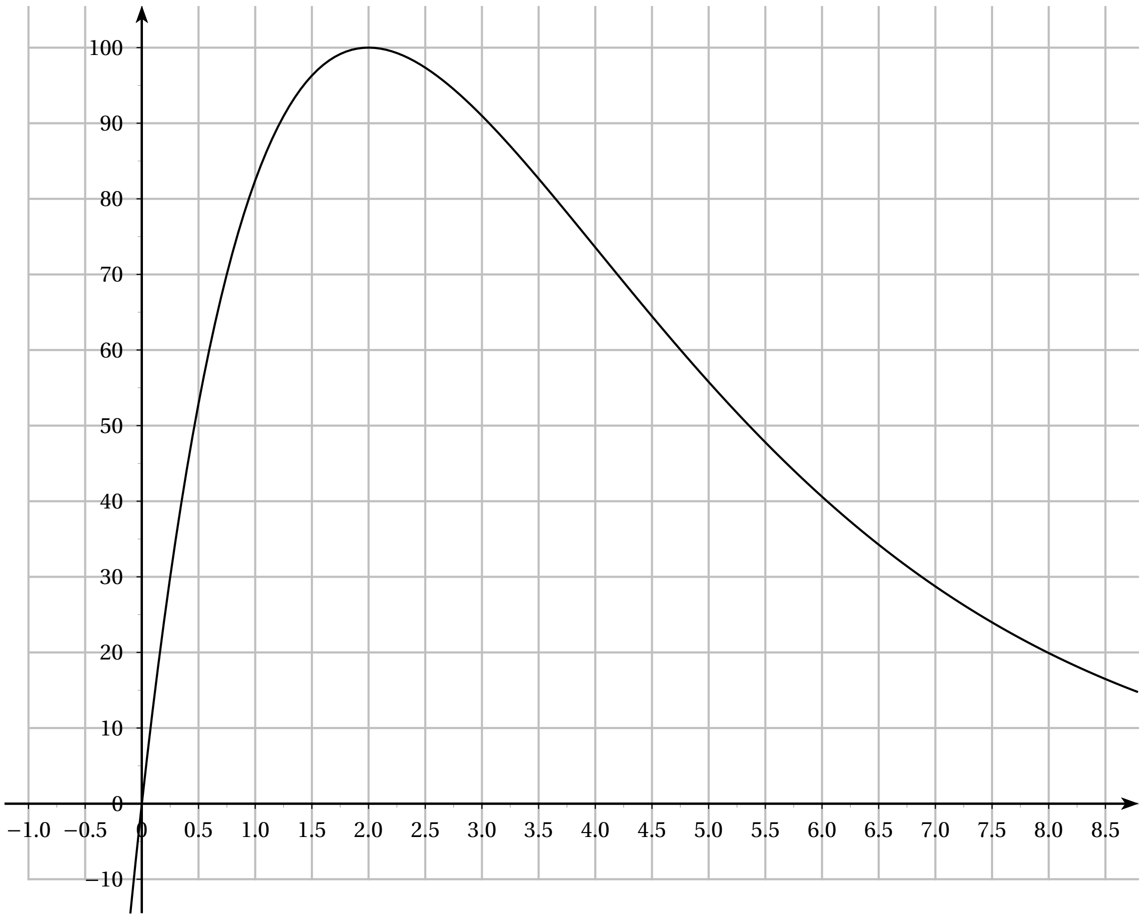
3. Un laboratoire teste la qualité d'un composant d'une crème solaire en mesurant le taux d'hydratation de la peau, x heures après l'application. La fonction f modélise de 0 à 7 heures le taux mesuré exprimé en pourcentage.

a) A quel moment le taux d'hydratation est-il maximal ?

D'après ce qui précède, le taux d'hydratation est maximal au bout de 2 heures et il est alors de 100%.

b) On peut commercialiser cette crème si le taux d'hydratation dépasse 50% pendant une durée d'au moins 6 heures. Le laboratoire peut-il commercialiser cette crème ?

D'après le graphique et la calculatrice, on observe que le taux d'hydratation est supérieur à 50% entre $0,464$ et $5,357$ heures soit pendant environ $4,893$ heures donc sur une période inférieure à 6 h. La crème ne sera donc pas commercialisée.



▷ **Exercice 6.**

PARTIE A

Soit h la fonction définie sur $[-2\ ;\ 1]$ par $h(x) = \mathrm{e}^x + x + 1$.

1. **Étudier le sens de variation de h sur $[-2\ ;\ 1]$.**

   $\forall\, x \in [-2\ ;\ 1]$, $h'(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0$ donc h est strictement croissante.

2. **On admet que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.**

   A l'aide de la calculatrice, on obtient : $-1{,}28 < \alpha < -1{,}27$.

3. **En déduire le tableau de signes de $h(x)$.**

x	-2		α		1
$h(x)$		$-$	0	$+$	

PARTIE B

Soient f la fonction définie sur $[-2\ ;\ 1]$ par $f(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

1. **Justifier que $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x h(x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$.**

   $\forall\, x \in [-2\ ;\ 1]$,

   $$f'(x) = \frac{(1 \times \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^x + 1) - x\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 1 + x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x h(x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$$

2. **En déduire le sens de variation de f.**

   $\forall\, x \in [-2\ ;\ 1]$, $(\mathrm{e}^x + 1)^2 > 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $h(x)$ d'où le tableau de variation de f :

x	-2		α		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
g'	-0.238	↘	-0.278	↗	-0.731