Chapitre 4
CALCUL NUMERIQUE
Fractions et puissances

I) Rappels sur les opérations avec des fractions :

INFO

- Pour additionner ou soustraire deux fractions, il faut les mettre **au même dénominateur**, puis ajouter les numérateurs et garder le dénominateur commun.
- Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, **tout en simplifiant**.
- Diviser par une fraction revient à **multiplier par son inverse**.

1 Effectue les calculs suivants et simplifie au maximum : $A=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\times\frac{21}{5}$; $B=\frac{3+\frac{1}{5}}{1-\frac{7}{4}}$

EXERCICE CORRIGE

$A=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\times\frac{21}{5}$

La multiplication est prioritaire

$=\frac{4}{3}-\frac{2\times21}{3\times5}$

On simplifie

$=\frac{4}{3}-\frac{2\times7\times3}{3\times5}$

$=\frac{4}{3}-\frac{14}{5}$

On met les fractions au même dénominateur

$=\frac{4\times5}{3\times5}-\frac{14\times3}{5\times3}$

$=\frac{20}{15}-\frac{42}{15}$

On soustrait les numérateurs

$A=\frac{-22}{15}$

$B=\frac{3+\frac{1}{5}}{1-\frac{7}{4}}=\frac{\frac{3\times5}{1\times5}+\frac{1}{5}}{\frac{1\times4}{1\times4}-\frac{7}{4}}$

On met les fractions au même dénominateur

$=\frac{\frac{15}{5}+\frac{1}{5}}{\frac{4}{4}-\frac{7}{4}}=\frac{\frac{16}{5}}{-\frac{3}{4}}$

On ajoute les fractions du haut et du bas

On multiplie par l'inverse

$=\frac{16}{5}\times\left(-\frac{4}{3}\right)$

$=-\frac{16\times4}{5\times3}$

$B=-\frac{64}{15}$

II) Puissances et écriture scientifique d'un nombre :

1) Puissances de 10 :

a) Définition :

Définition : soit n un nombre entier positif, on a :

- $10^n = 1\underbrace{0.....0}_{n\text{ zéros}}$ **(n est appelé l'exposant)**

- $10^{-n} = \underbrace{0,0....01}_{n\text{ zéros}}$ **(-n est appelé l'exposant)**

Exemples :

$10^3 = 1000$

$10^6 = 1\,000\,000$

$10^1 = 10$

$10^{-3} = 0,001 =$ un millième

Convention : $10^0 = 1$

b) Propriétés :

Propriété : soit n un nombre entier tel que $n \geq 2$**, on a :**

- $10^n = \underbrace{10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs}}$
- 10^{-n} est l'inverse de 10^n : $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n}$

Propriété : soit *a* et *b* des entiers relatifs, on a :

$$10^a \times 10^b = 10^{a+b} \qquad \left(10^a\right)^b = 10^{a \times b} \qquad \frac{10^a}{10^b} = 10^{a-b} = \frac{1}{10^{b-a}}$$

Exemples :

2) Notation scientifique d'un nombre :

Définition : l'écriture scientifique d'un nombre est la seule écriture $a \times 10^p$ **pour laquelle le nombre *a* est écrit avec un seul chiffre, autre que 0, avant la virgule.**

Exemples :

$0,00418 = 4,18 \times 10^{-3}$

$-784300 = -7,843 \times 10^5$

3) Puissances d'un nombre non nul :

a) exposant positif :

Soit *a* un nombre non nul et n un entier tel que $n \geq 2$ **. On pose :**

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Conventions :

- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$

Remarques :

- ***a*² se lit « *a* au carré »**
- a^3 **se lit « *a* au cube »**
- a^4 **se lit « *a* exposant quatre » (ou « *a* puissance quatre »)**

Exemples :

Historique : Dans la première partie du livre premier de sa *Théorie analytique des probabilités,* Laplace présente l'histoire heureuse de cette notation :

« La position d'une grandeur à la suite d'une autre suffit pour exprimer leur produit. Si ces grandeurs sont la même, ce produit est le carré ou la seconde puissance de cette grandeur. Mais, au lieu de l'écrire deux fois, **Descartes (1596-1650)** imagina de ne l'écrire qu'une fois, en lui donnant le nombre 2 pour exposant, et il exprima les puissances successives, en augmentant successivement cet exposant d'une unité. »

René Descartes

b) Exposant négatif :

Soit *a* un nombre relatif non nul, alors :

a^{-n} est l'inverse de a^n : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Exemples :

5^{-1} est l'inverse de 5 : $5^{-1} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$

2^{-3} est l'inverse de 2^3 : $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$

3^{-2} est l'inverse de 3^2 : $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

c) Propriétés :

Soient *a* et *b* deux nombres non nuls et *n* et *m* des entiers relatifs, on a :

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{n\times m}$$

$$\left(ab\right)^n = a^n \times b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Exemples :

$$3^{-4} \times 3^{6} = 3^{-4+6} = 3^{2}$$

$$5^{-2} \times 5^{-1} = 5^{-2+(-1)} = 5^{-2-1} = 5^{-3}$$

$$\frac{4^{2}}{4^{5}} = 4^{2-5} = 4^{-3}$$

$$\left(3x\right)^{2} = 3^{2} \times x^{2} = 9x^{2}$$

$$\left(7^{2}\right)^{-3} = 7^{2\times(-3)} = 7^{-6}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4} = \frac{2^{4}}{3^{4}} = \frac{16}{81}$$