Chapitre 1

Les isométries

19 juin 2003

Définition 1.0.1 *On appelle* <u>*isométrie du plan*</u> *une transformation, f, qui conserve les distances, c'est-à-dire pour tout M_1, M_2, si $M_1' = f(M_1), M_2' = f(M_2)$, on a*

$$d(M_1, M_2) = d(M_1', M_2').$$

Proposition 1.0.2 *Une translation, une rotation ou une symétrie axiale est une isométrie du plan.*

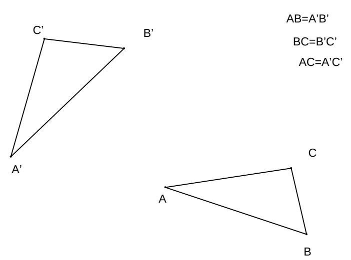
Si k est différent de ± 1, une homothétie ou une similitude de rapport k ne sont pas des isométries.

Proposition 1.0.3 *Le composé de deux isométries est une isométrie.*

Proposition 1.0.4 *Par une isométrie,*

- *l'image d'une droite est une droite,*
- *l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.*

Exemples : Lorsque l'on a des figures superposables ou isométriques, peut-on trouver une transformation telle que l'une soit l'image de l'autre par cette transformation ?
Soient AB et $A'B'$ deux segments de longueurs égales. Ils sont isométriques. Trouver une transformation qui telle que $A'B'$ soit l'image de AB.
On trouve une translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ composée avec une rotation d'angle $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ ou une symétrie, si les points sont alignés.
Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles superposables ou isométriques. Selon le cas, on trouve une translation composée avec soit une rotation soit une symétrie.



1.1 Composition et décomposition d'isométries

Définition 1.1.1 *On appelle* <u>*Identité*</u>*, on note* Id*, l'application* f *du plan telle que, pour tout* M*,* $f(M) = M$*.*

Définition 1.1.2 *Si* f *et* g *sont deux transformations, on obtient une nouvelle transformation notée* $h = g \ o \ f$*, composée de* f *et* g*, en effectuant successivement* f *puis* g*.*
Pour tout M*, si* $M_1 = f(M)$ *et* $M_2 = g(M_1)$*, alors* $h(M) = M_2$

$$M \overset{f}{\longrightarrow} M_1 \overset{g}{\longrightarrow} M_2$$

Proposition 1.1.3 *Le composé de deux translations de vecteurs respectifs* $\overrightarrow{V_1}$ *et* $\overrightarrow{V_2}$ *est une translation de vecteur* $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$*. Si* $\overrightarrow{V_2} = -\overrightarrow{V_1}$*, alors* $t_{\overrightarrow{V_1}} \ o \ t_{\overrightarrow{V_2}} = Id$

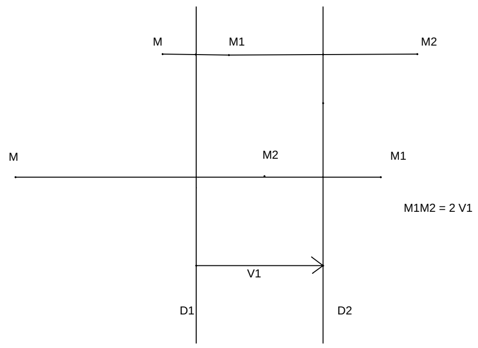
Proposition 1.1.4 *La symétrie axiale est une application involutive, c'est-à-dire, pour toute droite* D*,* $S_D o S_D = Id$*.*

Remarque 1 *En général, l'ordre de composition des transformations est important, cette opération n'est pas commutative :*

$$g \ o \ f \neq f o \ g$$

Comme l'addition des vecteurs est commutative, la composition des translations l'est aussi, $t_{\overrightarrow{V_1}} \ o \ t_{\overrightarrow{V_2}} = t_{\overrightarrow{V_2}} \ o \ t_{\overrightarrow{V_1}}$*.*

Proposition 1.1.5
- *Le composé de deux symétries axiales d'axes parallèles est une translation.*
- *Toute translation se décompose en deux symétries d'axes parallèles, l'un étant choisi, arbitrairement, perpendiculaire au vecteur de la translation.*



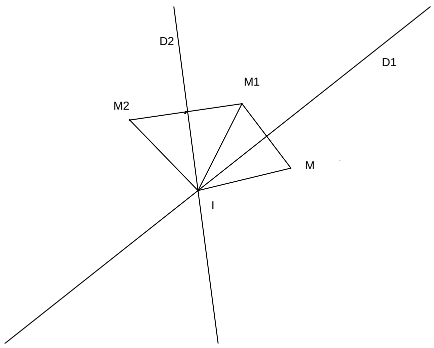
1. Soient D_1 et D_2 deux droites parallèles et M un point du plan. Si H_1 est la projection orthogonale de M sur D_1, on a $M_1 = S_{D_1}(M)$ tel que $\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{MH_1} = 2\overrightarrow{H_1M_1}$.
   Si H_2 est la projection orthogonale de M_1 sur D_2, on a $M_2 = S_{D_2}(M_1)$ tel que $\overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{M_1H_2}$. D'où,
   $$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = 2(\overrightarrow{MH_1} + \overrightarrow{M_1H_2}) = 2\overrightarrow{H_1H_2}$$
   On a un vecteur fixe indépendant de M, ainsi, $S_{D_2}oS_{D_1} = t_{2\overrightarrow{H_1H_2}}$
   L'ordre de la composition est important.
   On a $S_{D_2}oS_{D_1} = t_{2\overrightarrow{H_2H_1}}$ et $\overrightarrow{H_1H_2} = -\overrightarrow{H_2H_1}$.

2. Etant donnée une translation de vecteur $\overrightarrow{V}$, on choisit deux droites orthogonales à $\overrightarrow{V}$ et distantes de $\frac{1}{2}||\overrightarrow{V}||$. On obtient

$$t_{\overrightarrow{V}} = S_{D_2} o S_{D_1}.$$

On a deux méthodes possibles :
- on peut choisir (D_1) une droite orthogonale à $\overrightarrow{V}$ quelconque, alors, (D_2) est bien déterminée et dépend de (D_1) avec $(D_2) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{V}}(D_1)$
- on peut choisir (D_2) une droite orthogonale à $\overrightarrow{V}$ quelconque, alors, (D_1) est bien déterminée et dépend de (D_2).

Proposition 1.1.6 – *Le composé de deux symétries axiales d'axes concourants en I est une rotation de centre I.*
– *Toute rotation $r(I,\theta)$ se décompose en deux symétries d'axes concourants en I, d'angle $\frac{\theta}{2}$, l'un étant choisi arbitrairement.*



1. Soient D_1 et D_2 deux droites concourantes en I et M un point du plan. Soit $M_1 = S_{D_1}(M)$ et $M_2 = S_{D_2}(M_1)$, alors $IM = IM_1 = IM_2$ et

$$mes(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM_2}) = mes(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM_1}) + mes(\overrightarrow{IM_1}, \overrightarrow{IM_2}) = 2(\theta_1 + \theta_2)$$

d'où M_2 est l'image de M par la rotation de centre I et d'angle 2θ où θ est la mesure de l'angle de droite (D_1, D_2).

2. Etant donnée une rotation de centre I, on considère une droite D_1 quelconque passant par I, soit D_2 la droite passant I par telle que $mes(D_1, D_2) = \frac{\theta}{2}$. On obtient

$$r(I,\theta) = S_{D_2} o S_{D_1}$$

.

On a encore deux méthodes, soit qu'on choisit (D_1), soit que l'on choisit (D_2).

Corollaire 1.1.7 *Une symétrie centrale, de centre I, se décompose en deux symétries axiales d'axes perpendiculaires concourants en I.*

$S_I = rot(I,\pi)$ donc $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Proposition 1.1.8 *Le composé de deux rotations d'angles respectifs θ_1 et θ_2 est une rotation d'angle $\theta = \theta_1 + \theta_2$ ou une translation.*

1. Si les deux rotations ont le même centre :

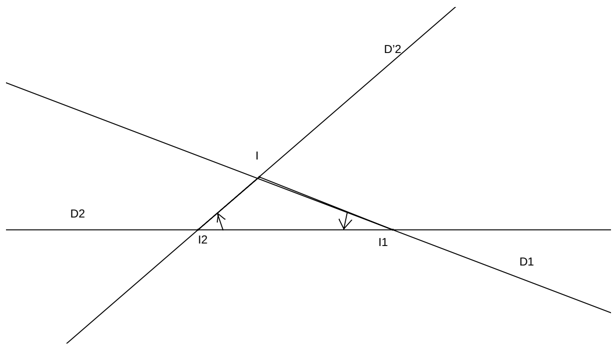
   (a) si $\theta = \theta_1 + \theta_2 \neq 2k\pi$, on obtient une rotation d'angle θ et de même centre.

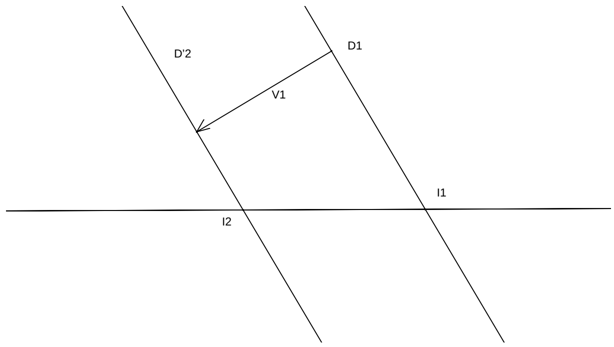
   (b) si $\theta = \theta_1 + \theta_2 = 2k\pi$, on obtient Id

2. Si les deux rotations n'ont pas le même centre, soient I_1 et I_2 ces deux centres distincts :

   (a) si $\theta = \theta_1 + \theta_2 \neq 2k\pi$, on obtient une rotation d'angle θ, dont on détermine le centre.

   (b) si $\theta = \theta_1 + \theta_2 = 2k\pi$, on obtient une translation de vecteur $2\overrightarrow{V_1}$.





Soit $D_2 = (I_1 I_2)$ la droite des centres. On écrit

$$rot((I_2)\ o\ rot(I_1) = (S_{D'_2}\ o\ S_{D_2})\ o\ (S_{D_2}\ o\ S_{D_1}) = S_{D'_2}\ o\ S_{D_1}$$

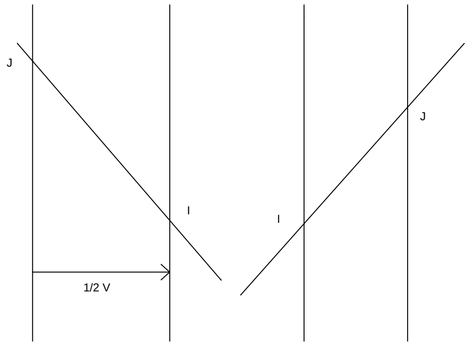
Si $\theta = \theta_1 + \theta_2 \neq 2k\pi$, alors les droites D'_2 et D_1 se rencontrent en I. On a une rotation de centre I.
Si $\theta = \theta_1 + \theta_2 = 2k\pi$, alors les droites D'_2 et D_1 sont parallèles et on a une translation.

Proposition 1.1.9 *Le composé d'une rotation d'angle θ et d'une translation est une rotation d'angle θ.*

Selon l'ordre de la composition, le centre de rotation obtenu est différent. Considérons $f = r(I,\theta) o\, t_{\overrightarrow{V}}$ et $g = t_{\overrightarrow{V}} o\, r(I,\theta)$, avec : $t_{\overrightarrow{V}} = S_{D_2}\ o\ S_{D_1}$ et selon l'ordre de composition $r(I,\theta) = S_{D_3}\ o\ S_{D_2}$ ou $r(I,\theta) = S_{D_1}\ o\ S_{D_2}$. Alors,

$$f = S_{D_3}\ o\ S_{D_2}\ o\ S_{D_2}\ o\ S_{D_1} = S_{D_3}\ o\ S_{D_1}$$

$$g = S_{D_2}\ o\ S_{D_1}\ o\ S_{D_1}\ o\ S_{D_3} = S_{D_2}\ o\ S_{D_3}$$

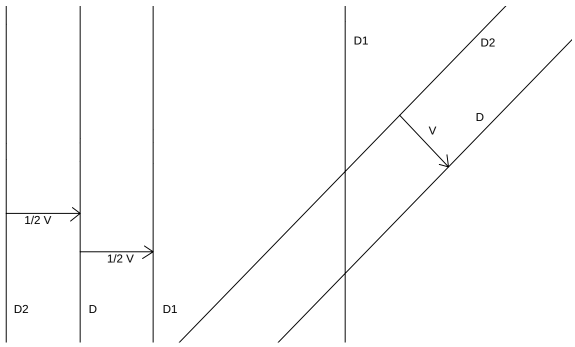


Définition 1.1.10 *On appelle <u>symétrie glissée d'axe D et de vecteur $\overrightarrow{V}$, parallèle à D</u>, le composé $S_D o\, t_{\overrightarrow{V}}$.*

Proposition 1.1.11 *Le composé d'une symétrie axiale et d'une translation est une symétrie axiale ou une symétrie glissée*

On distingue deux cas :

- le vecteur $\overrightarrow{V}$ est perpendiculaire à (D)
- le vecteur $\overrightarrow{V}$ n'est pas perpendiculaire à (D). On décompose le vecteur de la translation, en somme de deux vecteurs, l'un parallèle à l'axe et l'autre perpendiculaire.



Proposition 1.1.12 *Le composé d'une rotation et d'une symétrie axiale est une symétrie axiale ou une symétrie glissée.*

soient $r(I, \theta)$ et S_D

1. Si l'axe D de la symétrie axiale passe par I, on obtient une symétrie axiale d'axe D', passant par I, tel que $(D, D') = \pm\frac{\theta}{2}$, selon l'ordre de composition.
2. Si l'axe D de la symétrie axiale ne passe pas par I, soit $\overrightarrow{V}$, le vecteur orthogonal à D de longueur la distance de I à D. On obtient le composé d'une symétrie et d'une translation de vecteur $2\overrightarrow{V}$, qu'on peut exprimer comme une symétrie glissée.

Tableau des compositions des différentes isométries :

$g \setminus f$	t_{V_1}	$rot(O_1, \theta_1)$	S_{D_1}
t_{V_2}	$t_{V_1+V_2}$	$rot(O', \theta_1)$	si $V_2 \perp D_1$ alors $S_{D'}$ sinon $t_{V'}\ o\ S_{D'}$
$rot(O_2, \theta_2)$	$rot(O'', \theta_2)$	si $\theta_1 + \theta_2 = 2k\pi$ alors t_V sinon $rot(O', \theta_1 + \theta_2)$	si $O_2 \in D_1$ alors $S_{D'}$ sinon $t_{V'}\ o\ S_{D'}$
S_{D_2}	si $V_1 \perp D_2$ alors $S_{D'}$ sinon $t_{V'}\ o\ S_{D'}$	si $O_1 \in D_2$ alors $S_{D'}$ sinon $t_{V'}\ o\ S_{D'}$	si $D_1 \parallel D_2$ alors $t_{V'}$ si $O = D_1 \cap D_2$ alors $rot(O, \theta)$
$t_V\ o\ S_D$	$t_{V'}\ o\ S_{D'}$	$t_{V'}\ o\ S_{D'}$	si $D_1 \parallel D_2$ alors $t_{V'}$ si $O = D_1 \cap D$ alors $rot(O, \theta)$

Les éléments O', O", V', D' sont à déterminer d'après les données.

Théorème 1.1.13 *L'ensemble des isométries est formé de l'identité, des translations, des symétries, des rotations et des symétries glissées.*
Toute isométrie peut se décomposer en produit de symétries.

Définition 1.1.14 *On appelle déplacement toute isométrie qui conserve les angles orientés et antidéplacement les autres.*

Un déplacement est le composé d'un nombre pair de symétries et un antidéplacement d'un nombre impair de symétries.

Théorème 1.1.15 Reconnaissance des isométries selon les points invariants
Soit f une isométrie du plan.

1. *si f admet trois points invariants, non alignés, alors $f = Id$*
2. *si f est différente de Id et admet deux points invariants, distincts, A, B, alors f est une symétrie d'axe (AB)*
3. *si f admet un seul point invariant alors f est une rotation de centre ce point.*
4. *si f n'admet aucun point invariant alors f est une translation ou une symétrie glissée.*

invavariant	déplacement	nb sym	antidéplacement	nb sym
le plan	Identité	0		
une droite			symétrie	1
un point	rotation	2		
vide	translation	2	symétrie glissée	3