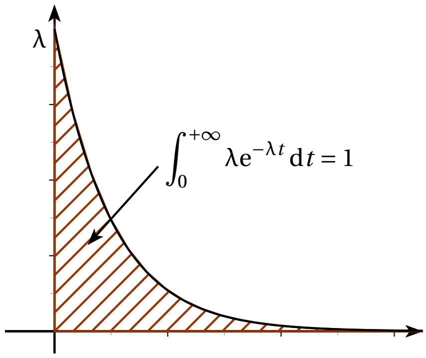
# Loi exponentielle : méthodes à retenir




**Remarques 1 :**

On remarquera que la valeur de λ peut se lire graphiquement sur l'axe des ordonnées.

L'usage des formules évite d'avoir recours au calcul intégral

Comme pour les lois à densités, les résultats sont les mêmes pour des inégalités strictes ou larges …
( comme pour la loi uniforme )

**Loi exponentielle**

$X$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ ( $\lambda > 0$ )

- La densité de probabilité $f$ est définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
- Si $0 \leqslant c \leqslant d$ alors $P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$
- $P(X \leqslant c) = p(0 \geqslant X \geqslant c) = 1 - e^{-\lambda d}$
- $P(X \geq c) = e^{-\lambda c}$
- $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

## Méthode 1 : Calculs de probabilités

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$

- $p(X \geqslant 1) = e^{-\lambda \times 1} = e^{-2\times 1} = e^{-2} \approx 0,135$
- $p(X < 3) = 1 - e^{-\lambda\times 3} = 1 - e^{-6} \approx 0,998$
- $p(0,5 < X \leqslant 2) = e^{-2\times 0,5} - e^{-2\times 2} = e^{-1} - e^{-4} \approx 0,350$
- $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{2}$

### Attention

Comme pour tous les calculs de probabilités, un résultat supérieur à 1 ou inférieur à 0 doit vous interpeller. C'est souvent lié à une erreur dans l'ordre des $e^{-\lambda c}$ et $e^{-\lambda d}$

**Loi sans vieillissement**

- On dit que la durée de vie d'un composant électronique ( par exemple ) est sans vieillissement lorsque la probabilité qu'il fonctionne encore pendant une période $h$ alors qu'il fonctionne à l'instant $t$, ne dépend pas de $t$ :
$\forall\, t, h \in \mathbb{R}_+^*,\ P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$
- La loi exponentielle est sans vieillissement.

## Méthode 3 : Utilisation de la loi sans vieillissement

Soit X une v-a qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,02$.

1. Calculer $P(X > 3)$
2. Calculer $P_{X>5}(X > 2)$

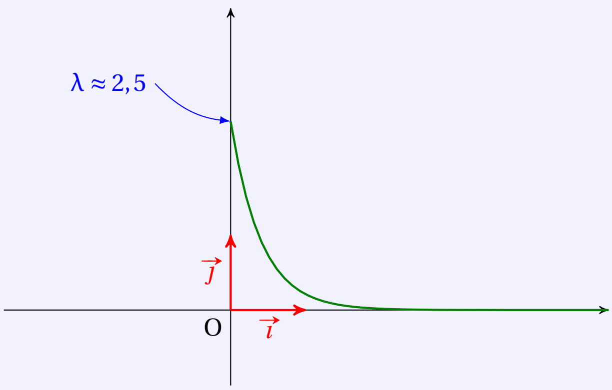
**Correction :**

1. $P(X > 3) = e^{-\lambda\times 3} = e^{-0,02\times 3} = e^{-0,06} \approx 0,942$.
2. $P_{X>5}(X > 2) = P_{X>2}(X > 2+3) = P(X > 3)$ car la loi $exp$ est sans vieillissement donc $P_{X>5}(X > 2) \approx 0,942$

### Méthode 2 : Détermination de $\lambda$

- *Par lecture graphique*

  X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$. On donne ci-dessous la courbe représentative de sa densité de probabilité. Donner une valeur approchée de $\lambda$.




On lit $\lambda$ à l'intersection avec l'axe des ordonnées. En effet, $f(0) = \lambda e^{-\lambda \times 0} = \lambda$.

- *Grâce à la donnée d'une probabilité*

  X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ et on sait que $p(X > 1) = 0,35$

$$\begin{aligned} p(X > 2) = 0,35 &\Longleftrightarrow e^{-\lambda \times 2} = 0,35 \\ &\Longleftrightarrow -2\lambda = \ln(0,35) \\ &\Longleftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,35)}{2} \approx 0,525 \end{aligned}$$

**Remarque 2 :** La recherche de $\lambda$ est un « grand classique » des exercices de bac et fait souvent l'objet de la première question.

### ROC

A partir du résultat $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda t}\, dt$ il faut être capable de redémontrer tous les résultats du premier encadré ainsi le fait que la loi exponentielle est sans vieillissement ( voir le cours pour les démonstrations ).

La démonstration du résultat $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ peut faire l'objet d'une ROC à l'examen.