2 بكالوريا علوم رياضية	فرض محروس رقم 02	ثانوية موسى بن نصير
ذ : عبدالله بن لـختير	الدورة الأولى 2011/2010	نيابة الخميسات
مدة الإنجاز : أربع ساعات		

- **التمرين رقم 01:** $(03pts)$

ليكن $t \in \mathbb{R}^{*+}$ و $n \in \mathbb{N}^*$.

و نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ بما يلي :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right), f_n(x) = x^n - t(1-x) .$$

1)- بين أن المعادلة : $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}^{*+}$ بحيث $0 < \alpha_n < 1$.

2)- بين أن : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right), f_{n+1}(\alpha_n) = -t(1-\alpha_n)^2$ ، ثم إستنتج رتابة المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3)- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة و حدد تأطيرا لنهايتها .

4)- أثبت بالخلف أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$.

- **التمرين رقم 02:** $(05pts)$

I- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = \dfrac{x^3+4x}{8}$.

1)- بين أن f متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

2)- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f(x) = x$ و أدرس إشارة $f(x) - x$.

3)- حدد ما يلي : $f\left(\left]-\infty,0\right]\right)$ و $f\left(\left[0,2\right]\right)$ و $f\left(\left[2,+\infty\right[\right)$.

II- لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ و } \left(\forall n \in \mathbb{N}\right), u_{n+1} = f(u_n) .$$

1)- حدد شرطا كافيا و لازما لكي تكون المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثابتة .

2)- نفترض أن $u_0 \in \left]0,2\right[$ ، بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها .

3)- نفترض أن $u_0 \in \left]-2,0\right[$ ، بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها .

4)- أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، ثم أحسب نهايتها معللا جوابك في كل حالة من الحالتين :

$u_0 \in \left]2,+\infty\right[$ و $u_0 \in \left]-\infty,-2\right[$.

- **التمرين رقم 03**: $\left(03pts\right)$

لكل $n\in\mathbb{N}$ ، نضع : $u_n=\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ و $v_n=\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

و لتكن الدالة F_n المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right),F_n\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}.$$

1)- بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متحاديتان ، ماذا تستنتج ؟

2)- بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right),F_n^{'}\left(x\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$.

3)- إستنتج أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right),F_{2n+1}\left(x\right)\leq \operatorname{Arctan}\left(x\right)\leq F_{2n}\left(x\right)$.

4)- إستعمل نتيجة السؤال **3**)- لتحديد النهاية المشتركة لكل من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **التمرين رقم 04**: $\left(04pts\right)$

لتكن f_n الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f_n\left(x\right)=\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{nx+p}}\right)-\sqrt{n}$$ ، حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

1)- بين أن مجموعة تعريف f_n هي : $I_n=\left]-\frac{1}{n},+\infty\right[$.

2)- بين أن f_n تقابل من المجال I_n نحو مجال J_n ينبغي تحديده .

3)- إستنتج أن المعادلة : $f_n\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n في I_n و أن $\alpha_n>0$.

4)- بين أن : $\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right),2\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)<\frac{1}{\sqrt{x}}<2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)$.

5)- أثبت أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\right),\frac{9}{16}-\frac{1}{n}<\alpha_n<\frac{9}{16}$ ، ثم إستنتج أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ متقاربة محددا نهايتها .

- **التمرين رقم 05:** $\left(05pts\right)$

لتكن f الدالة المعرفة على $I=\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي :

$$\left(\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right),f\left(x\right)=\sqrt{1+\frac{1}{\tan\left(x\right)}} \text{ و } f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 .$$

1)- أدرس إتصال و قابلية إشتقاق f على اليسار في $x_0=\frac{\pi}{2}$.

2)- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرف على المجال $J=\left[1,+\infty\right[$.

3)- بين أن المعادلة : $f\left(x\right)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ و أن $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

4)- لتكن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0=\frac{\pi}{4}$ و $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),u_{n+1}=f\left(u_n\right)$.

أ- باستعمال متفاوتة التزايدات المنتهية ، بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\left|u_{n+1}-\alpha\right|\leq\frac{3}{4}\left|u_n-\alpha\right|$.

ب- أثبت أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها.

5)- بين أن f^{-1} قابلة للإشتقاق على المجال $\left]1,+\infty\right[$ و أن :

$$\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right),\left(f^{-1}\right)'\left(x\right)=\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2+1} .$$

6)- لكن $x\in\mathbb{R}^{*+}$ ، نضع : $h\left(x\right)=f^{-1}\left(\sqrt{1+x}\right)+f^{-1}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$.

⇦ بين أن h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$ ، ثم أحسب $h'\left(x\right)$ و إستنتج تعبير $h\left(x\right)$ على $\mathbb{R}^{*+}$.

7)- لتكن $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right),S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f^{-1}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

⇦ بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right),f^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq S_n\leq f^{-1}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ ، ثم إستنتج أن المتتالية $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها .

⇦ **تمارين إضافية:**

- **التمرين رقم 01:** $(01pt)$

ليكن $a \in \mathbb{R}$ و لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$a_1 \in \mathbb{R}$ و $(\forall n \in \mathbb{N}^*), a_{n+1} = (a_n)^2 + (1-2a)a_n + a^2$.

⇦ حدد جميع قيم العدد الحقيقي a_1 التي لأجلها تكون المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة ، ثم أحسب في هذه الحالة نهايتها .

- **التمرين رقم 02:** $(02pt)$

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتاليتين المعرفتين بما يلي :

$\begin{cases} u_1 = 1 , u_2 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*), u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}} \end{cases}$ و $\begin{cases} v_1 = 9 , v_2 = 6 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*), v_{n+2} = \sqrt{v_n} + \sqrt{v_{n+1}} \end{cases}$.

⇦ بين أن المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربتان وحدد نهاية كل واحدة منهما .

- **التمرين رقم 03:** $(02pt)$

لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية محدودة بحيث : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), x_{n+2} \leq \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{2}{3}x_n$.

⇦ أثبت أن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة (غير مطلوب حساب نهايتها) .

إنتهى الموضوع .

⇦ تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .