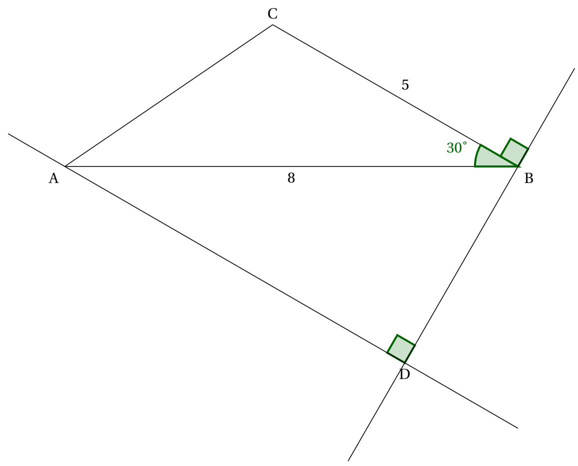
Applications du produit scalaire (I) : relations métriques dans le triangle

▷ **Exercice 1.** Soit ABC un triangle tel que BC = 5 cm, AB = 8 cm et $\widehat{ABC} = 30°$



1. Calculer AC, $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$.

2. Calculer, en cm^2, l'aire du triangle ABC.

3. La perpendiculaire en B à (BC) coupe la parallèle à (BC) passant par A au point D.

a) Calculer les longueurs DA, DB et DC.

b) Calculer une mesure de l'angle $\widehat{ACD}$.

▷ **Exercice 2.** On considère un parallélogramme ABCD, de centre K, tel que : AB = 7, BC = 5 et BD = 8. Calculer la longueur AC.

▷ **Exercice 3.** Soit $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé.

1. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre A(3 ; −2) et de rayon 3, 6.

2. L'origine O du repère appartient-elle à $\mathscr{C}$?

▷ **Exercice 4.**

1. Déterminer une équation du cercle de centre C(1 ; −3) et de rayon 5.

2. Le point A(−3 ; −6) est-il un point de ce cercle?

3. Déterminer les points d'ordonnée 2 de ce cercle.

▷ **Exercice 5.** Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan, on considère les points A(−4 ; 3) et B(8 ; −2).

1. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB].

2. Montrer que le point E(2 ; 7) appartient au cercle $\mathscr{C}$.

3. Déterminer une équation de la tangente à ce cercle au point E.

4. Déterminer les points R et T du cercle dont l'ordonnée est nulle.

▷ **Exercice 6.** Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan, on considère les points A(−3 ; 2), B(5 ; 4) et C(3 ; −4).

1. Déterminer une équation de la médiatrice (Δ) de [AB] et une équation de la médiatrice (Δ') de [BC].

2. En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

3. Déterminer une équation de ce cercle.

4. Déterminer une équation de la tangente à ce cercle en A.

▷ **Exercice 7.** Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A(−3 ; 2), B(1 ; 5) et C(1 ; −1).

1. Montrer que le triangle ABC est isocèle.

2. Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre A passant par B.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ en B.

4. Le cercle $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées en I et J. La tangente (T) coupe l'axe des ordonnées en K. Calculer les coordonnées des points I, J et K et montrer que $KI \times KJ = KB^2$

5. a) Déterminer l'équation cartésienne du cercle Γ de diamètre [AC].
   b) Vérifier que Γ passe par le milieu A' de [BC]. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

6. On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M(\,x\,;\,y\,)$ du plan vérifiant $MB^2 + MC^2 = 50$.
   a) Exprimer MB^2 et MC^2 en fonction de x et y.
   b) Montrer que $\mathscr{E}$ est un cercle dont on déterminera les éléments caractéristiques.

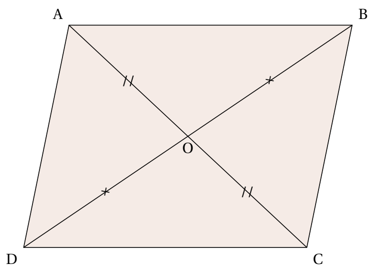
7. Calculer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

▷ **Exercice 8.** Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, quel est le périmètre du cercle d'équation $x^2 + y^2 + 14x - 10y + 48 = 0$?

▷ **Exercice 9.** Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points $A(\,-3\,;\,3\,)$, $B(\,5\,;\,7\,)$, $C(\,6\,;\,0\,)$, et I le milieu du segment [AB]. (*on pourra s'aider d'une figure*)

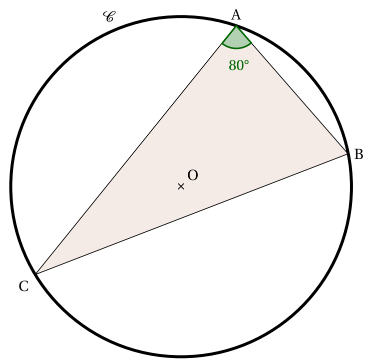
1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les longueurs AB et AC puis en utilisant une autre écriture de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, déterminer une mesure au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.
3. Calculer l'aire du triangle ABC.
4. Déterminer les coordonnées du point I.
5. Démontrer qu'une équation de la droite (Δ), médiatrice du segment [AB] est $2x + y = 7$.
6. On admet qu'une équation de la médiatrice (Δ') du segment [AC] est $3x - y = 3$. En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit Γ au triangle ABC.
7. Donner une équation cartésienne de Γ.
8. Démontrer que Γ et l'axe des abscisses ont deux point d'intersection dont on précisera les coordonnées.

▷ **Exercice 10.** Soit ABCD un parallélogramme de centre O tel que $AB = 5$, $AD = 4$ et $BD = 7$.



1. Donner la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$ arrondie au degré.
2. Calculer la longueur AC.
3. Donner la mesure de l'angle $\widehat{CAB}$ arrondie au degré.
4. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

▷ **Exercice 11.** On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 3. Soient [AB] et [AC] deux cordes de $\mathscr{C}$ telles que $AB = 3$ et $\widehat{BAC} = 80°$, C appartenant au grand arc $\widehat{AB}$.



1. Quelle est la nature du triangle OAB ? En déduire la mesure de l'angle $\widehat{OAC}$, puis la valeur approchée au centième de la longueur AC.
2. En déduire la valeur approchée au centième de l'aire du triangle ABC.

▷ **Exercice 12.** Dans un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 4 = 0$.

1. Déterminer les coordonnées du centre Ω de $\mathscr{C}$ ainsi que son rayon.
2. Vérifier que le point $A(\,-1\,;\,1\,)$ appartient à $\mathscr{C}$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T_A) à $\mathscr{C}$ au point A.
4. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $x - y = 4$. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$' de centre Ω tel que $\mathscr{D}$ soit tangente à $\mathscr{C}$'.

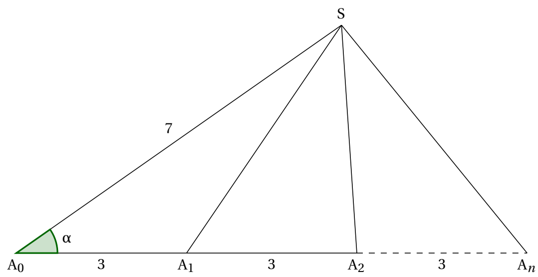
▷ **Exercice 13.** On construit $n+1$ points alignés $A_0, A_1, \ldots, A_n$ tels que $A_kA_{k+1} = 3$.
S est le point tel que $A_0S = 7$ et $\widehat{A_1A_0S} = \alpha$ avec $\alpha \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

1. Justifier que ${SA_2}^2 = 2{SA_1}^2 - 31$

2. Justifier que ${SA_1}^2 = 58 - 42\cos\alpha$, puis en déduire SA_1 et SA_2.

3. On définie la suite (u_n) par $u_0 = 7$, $u_1 = \sqrt{58 - 42\cos\alpha}$ et pour tout entier naturel n, $u_n = SA_n$.
Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = \sqrt{2u_{n+1}^2 - {u_n}^2 + 18}$.

4. Proposer un algorithme en Python ou en langage TI qui permet d'afficher la valeur de u_{50}.



▷ **Exercice 14.** On considère deux points A et B tels que $AB = 7\,cm$. Combien existe-t-il de de points C tels que le triangle ABC soit un triangle rectangle d'aire $10\,cm^2$.