Sommaire

Probabilités continues : Ch8

1 Loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$

1.1 Définition

aussi appelée loi gaussienne, loi de Gauss ou loi de Laplace-Gauss

Définition 1.

Soit μ et σ deux réels tels que $\sigma > 0$. On dit que la variable aléatoire X suit une **loi normale**, si pour tous réels c et d, on a :

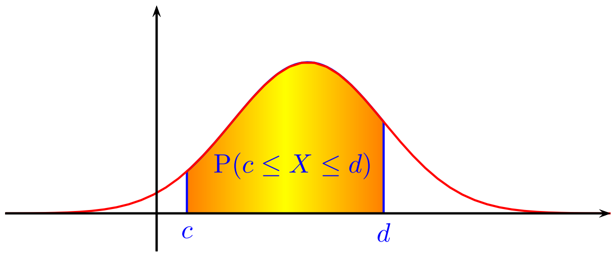
$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

on note $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

f est appelée **densité de la loi normale de paramètre μ et σ.**

Représentation graphique :

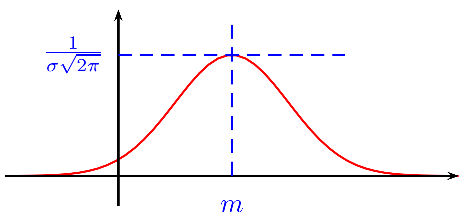
courbe « en cloche »



Propriété 1.

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$ alors les paramètres d'une loi normale sont son espérance et son écart-type :

$$E(X) = m \text{ et } \sigma(X) = \sigma.$$



- la courbe admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x = m$;
- le maximum de la courbe est atteint en m, espérance de la variable X et vaut $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;
- plus σ est grand, plus la courbe « s'étale » autour de m.

`Les syntaxes, avec les calculatrices sont les suivantes :`

Casio 35 : P$(a \leq X \leq b)$ = `NormCD`(a, b, σ, μ)

TI 82 : P$(a \leq X \leq b)$ = `normalFrep`(a, b, μ, σ)

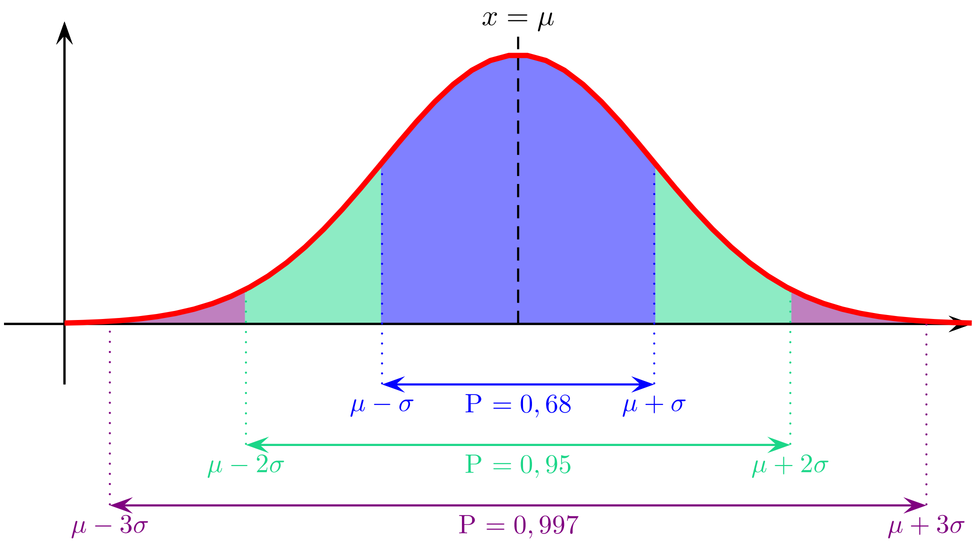
1.2 Intervalles en fonction de σ

Propriété 2.

Si X suit la loi normale de paramètres μ et σ, alors

- $\mathrm{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$;
- $\mathrm{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$;
- $\mathrm{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$.

Interprétation graphique :



1.3 Approximation

loi de Bernoulli et loi binomiale

Rappels : on répète n fois, de façon indépendante, une même expérience aléatoire suivant une loi de **Bernoulli** donnant lieu à deux issues : succès (probabilité p) et échec (probabilité $1 - p$).
La variable aléatoire X qui, à cette série de n expériences, associe le nombre de succès suit la loi **binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres n et p.
Son espérance est $E(x) = np$ et son écart-type $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Propriété 3.

La loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$ lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

On a représenté ci-contre le diagramme en bâtons de la loi de probabilité d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ ainsi que la représentation graphique de la densité de probabilité de la loi normale $\mathcal{N}\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$.
On remarque une certaine similitude !

Rappel : $\mathrm{P}(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$

2 Loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

2.1 Lien avec la loi normale centrée réduite

Définition 1.

Dire qu'une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres μ et σ revient à dire que la variable aléatoire T définie par :

$$T = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

suit une loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$