

Durée:04 heure

• التمرين رقم 01:(1) - حل المعادلة التفاضلية : $(E): y' = 2y + 8$.(2) - نبحث عن جميع الدوال العددية f القابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ بحيث :

$$(F): (\forall x \in]0; +\infty[); x.f'(x) = (2x+1)f(x) + 8x^2$$

$$\Leftrightarrow \text{نكل }]0; +\infty[\text{ نضع } , x \in]0; +\infty[: g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

أ- بين أن f تكون حلا للمعادلة (F) إذا و فقط إذا كانت g حلا للمعادلة (E) .ب- استنتج مجموعة حلول المعادلة (F) ، ثم حدد الحل h للمعادلة (F) بحيث : $h(1) = 0$.• التمرين رقم 02:في الفضاء المتجهي الحقيقي $(E, +, \cdot)$ لمجموعة الدوال العددية المعرفة من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} نعتبر F مجموعة حلول المعادلة التفاضلية : $(E_a): y'' - 2y' + (1+a^2)y = 0$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$.(1) - بين أن : $F = \{ \alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \}$ ، حيث φ_1 و φ_2 دالتين ينبغي تحديدهما .(2) - بين أن F فضاء متجهي جزئي من $(E, +, \cdot)$ و أن $B(\varphi_1, \varphi_2)$ أساس له .(3) - لتكن f دالة عددية تنتمي إلى F .أ- بين أن $f' \in F$ ، ثم حدد إحداثيتي f' في الأساس $B(\varphi_1, \varphi_2)$.ب- بين أن f تقبل دالة أصلية h تنتمي إلى F ، ثم حدد إحداثيتي h في الأساس $B(\varphi_1, \varphi_2)$.ج- بين أن ل φ_1 و φ_2 دالتين أصليتين φ_1 و φ_2 (على التوالي) تنتميان إلى F ينبغي تحديدهما .

$$(4) - \text{نكل } n \in \mathbb{N} : \text{ نضع } : u_n = \int_0^\pi e^x \cos(nx) dx \text{ و } v_n = \int_0^\pi e^x \sin(nx) dx$$

• عبر عن الحدين u_n و v_n بدلالة n ، ثم أحسب نهايتي كل من $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

• التمرين رقم 03:

ليكن θ عددا حقيقيا من المجال $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

(1)- حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة: $(E_\theta): z^2 - 2ie^{i\theta}z - 4(1-i)e^{2i\theta} = 0$.

(2)- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) ، نعتبر النقطتين

A و B لحقاهما على التوالي: $z_A = 2e^{i\theta}$ و $z_B = -2(1-i)e^{i\theta}$.

أ- أكتب z_B على الشكل الأسّي.

ب- أحسب اللوح z_C للنقطة C بحيث يكون الرباعي $OACB$ متوازي الأضلاع.

(3)- نعتبر في \mathbb{C} المعادلة: $(F_\theta): (\sqrt{2}z - 1)^3 = (-2 + 2i)e^{i\theta}z^3$.

أ- حدد الجذور المكعبة للعدد العقدي: $(-2 + 2i)e^{i\theta}$.

ب- استنتج حلول المعادلة (F_θ) على الشكل الجبري.

• التمرين رقم 04:

x و y رقمين متتابعين و غير منعدمين في نظمة عد ذات الأساس b بحيث: $\overline{xxxx(b)} = (\overline{yy(b)})^2$.

(1)- بين أن: $(E): x(b^2 + 1) = y^2(b + 1)$.

(2)- أ- بين أن: $(b^2 + 1) \wedge (b + 1) = (b + 1) \wedge 2$.

ب- باستعمال مبرهنة كوص، أثبت أن b عدد فردي.

(3)- نضع: $b = 2k + 1$ ، حيث $k \in \mathbb{N}^*$.

أ- بين أن: $(F): x(2k^2 + 2k + 1) = y^2(k + 1)$.

ب- حدد قيمة k ، ثم استنتج كلا من الأساس b و الرقمين x و y .

• التمرين رقم 05:

← الجزء الأول:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $I =]-1; +\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x} \text{ و } g(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$$

و ليكن (C_f) و (C_g) منحنيتي f و g في معلم متعامد و ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1)- أدرس تغيرات كل من f و g ، ثم تحقق أن: $(\forall x \in I); g(x) = f(x) - f'(x)$.

(2)- أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) ، ثم أرسمهما في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(3)- أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنيين (C_f) و (C_g) و المستقيمين $x=0$ و $x=1$.

← الجزء الثاني:

نضع : $J = \int_0^1 f(t) dt$ ، و نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = (-1)^n \int_0^1 t^n e^t dt \text{ و } u_0 = \int_0^1 e^t dt$$

(1)- بين أن : $1 \leq J \leq \frac{e}{2}$ ، ثم أحسب الحدين u_0 و u_1 .

(2)- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1)u_n$.

(3)- نكث $n \in \mathbb{N}^*$ ، نضع : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ و $R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f(t) dt$.

أ- بين أن : $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$ نكث t من $[0;1]$

ثم إستنتج أن : $J = S_n + R_n$.

ب- بين أن : $|R_n| \leq \frac{e}{2(n+2)}$ ، ثم إستنتج أن المتتالية $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة محددًا نهائيًا .

← الجزء الثالث:

تكن F الدالة المعرفة بما يلي : $F(x) = \int_0^{\ln x} [f(t)]^2 dt$.

(1)- بين أن F معرفة على المجال $\left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$.

(2)- بين أن F قابلة للاشتقاق على $\left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$ ، ثم أحسب $F'(x)$.

(3)- بين أن : $\left(\forall x \in \left] \frac{1}{e}; 1 \right] \right); F(x) \leq x^2 \left(1 - \frac{1}{1 + \ln x} \right)$ ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{e} \right)^+} F(x)$.

(4)- بين أن : $\left(\forall x \in \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[\right); F(x) = \frac{x^2}{2(1 + \ln x)^2} - \frac{1}{2} + \int_0^{\ln x} \frac{e^{2t}}{(1+t)^3} dt$.

(5)- إستنتج النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ ، ثم ضع جدول تغيرات الدالة F .

إنتهى الموضوع .