# Chronique 8

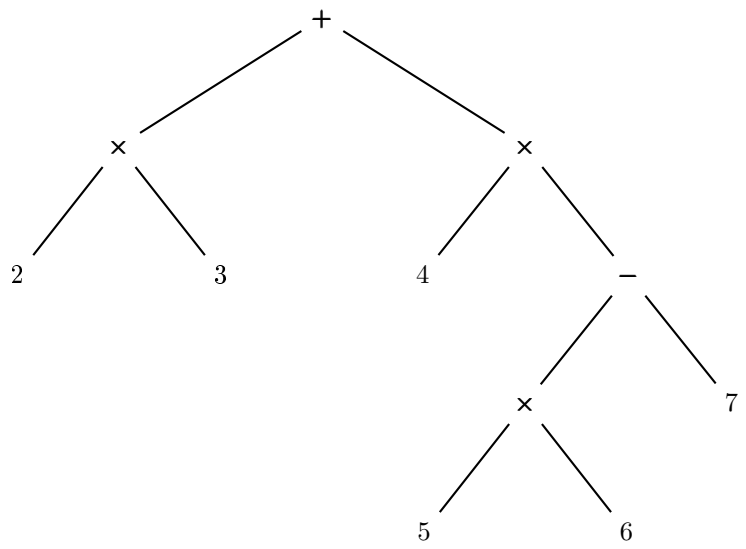
# Expressions algébriques et arbres

Au collège, pour faire comprendre aux élèves la priorité des opérations, il est parfois utile de construire un arbre.
Plus tard au lycée, pour déterminer la séquence d'opérations définie par une fonction comme $x \longmapsto 2 + \dfrac{3}{x-4}$, il peut également être utile de construire un arbre.
Enfin quand, devenu professeur, on utilise LaTeX et qu'on veut entrer des fonctions en mode post-fixé, il peut encore être utile de construire des arbres.

## 8.1 Priorité des opérations

On va prendre une expression déjà un peu compliquée : $2 \times 3 + 4 \times (5 \times 6 - 7)$
et on va tracer l'arbre qui lui correspond.
Ma première idée a été d'utiliser `\pstree` (voir saison 2 chronique 5).

Hélas le résultat est assez décevant :

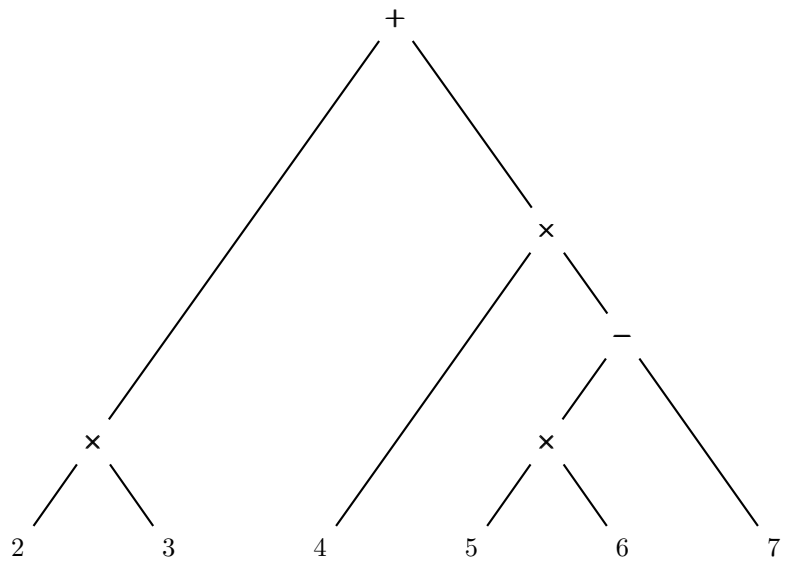



J'aurais quand même bien aimé que les nombres 2, 3, 4, 5, 6 et 7 soient sur une même ligne !
Malgré d'intenses recherches sur Internet, je n'ai pas trouvé de solution en utilisant les outils proposés par `\pstree`.

Voici quand même le code qui m'a permis de tracer cet arbre :

```
\psset{levelsep=1.5cm,treesep=2.5cm}
\pstree[treemode=D,nodesep=4pt]{\TR{$\pmb{+}$}}
{   \pstree{\TR{$\pmb{\times}$}
    {   \TR{2}
        \TR{3}
    }
    \pstree{\TR{$\pmb{\times}$}}
    {   \TR{$4$}
        \pstree{\TR{$\pmb{-}$}}
        {   \pstree{\TR{$\pmb{\times}$}}
            {   \TR{$5$}
                \TR{$6$}
            }
            \TR{$7$}
        }
   }
}
```

Je voulais quelque chose comme ça :




Il a donc fallu se passer de `\pstree` et construire l'arbre « à la main ».
Pour cela, je me suis rappelé de ce que j'avais fait sur les graphes en utilisant les nœuds (`node`) et les liens qui permettent de les relier (voir saison 2 chronique 7).
J'ai donc défini des nœuds par `\Rnode`, que j'ai placés au moyen de `\rput`. Puis je les ai reliés au moyen de `\ncline` qui trace des segments entre deux nœuds.
La distance entre le nœud et le segment est défini par `nodesep` ; on peut régler différemment la distance entre le segment et le nœud de départ avec `nodesepA` tandis que c'est `nodesepB` qui règle cette distance avec le nœud d'arrivée.
J'ai placé le tout dans un cadre créé par `\pspicture` et le tour était joué !

Voici le code de cet arbre :

```
\psset{xunit=1cm,yunit=0.7cm}
\def\xmin {0}   \def\xmax {12}
\def\ymin {0}   \def\ymax {12}
\begin{pspicture}(\xmin,\ymin)(\xmax,\ymax)
\psset{nodesepA=5pt,nodesepB=5pt,arrowsize=3pt 2}

%%% Définition des noeuds

% Opérandes
\rput(1,1){\Rnode{1}{$2$}}   \rput(3,1){\Rnode{2}{$3$}}
\rput(5,1){\Rnode{3}{$4$}}   \rput(7,1){\Rnode{4}{$5$}}
\rput(9,1){\Rnode{5}{$6$}}   \rput(11,1){\Rnode{6}{$7$}}

% Opérateurs
\rput(2,3){\Rnode{7}{$\pmb{\times}$}}
\rput(8,3){\Rnode{8}{$\pmb{\times}$}}
\rput(9,5){\Rnode{9}{$\pmb{-}$}}
\rput(8,7){\Rnode{10}{$\pmb{\times}$}}
\rput(6,11){\Rnode{11}{$\pmb{+}$}}

%%% Définition des segments

\ncline{1}{7}  \ncline{2}{7}
\ncline{5}{8}  \ncline{4}{8}
\ncline{6}{9}  \ncline{9}{8}
\ncline{3}{10} \ncline{9}{10}
\ncline{7}{11} \ncline{11}{10}

\end{pspicture}
```

## 8.2 Parcours d'arbre

Maintenant que l'arbre est construit, on va voir comment le parcourir.
J'ai voulu représenter sur l'arbre précédent le trajet passant par tous les nœuds. Pour cela il a fallu tracer des flèches reliant les nœuds, mais avec un léger décalage pour qu'il n'y ait pas de superposition avec les segments déjà tracés : c'est l'option `offset` qui permet ce décalage.

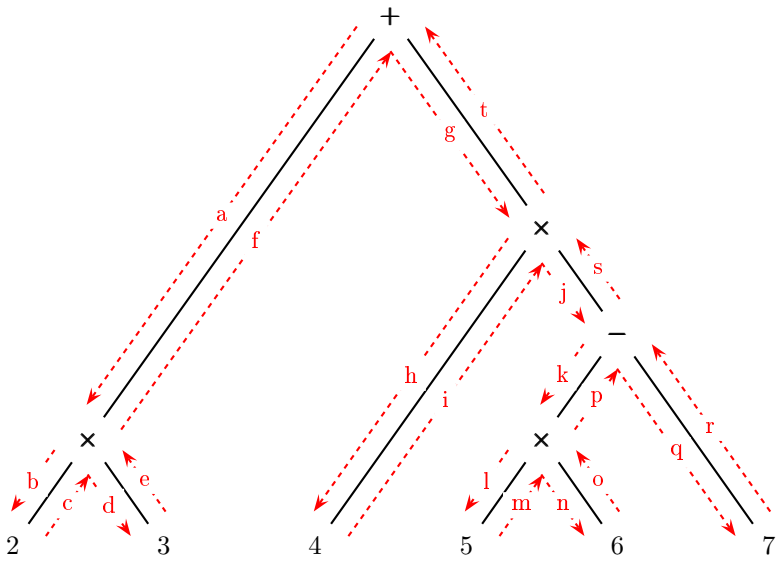
Voici le code qu'il a fallu rajouter juste avant le `\end{pspicture}` :

```
\psset{linecolor=red,offset=-8pt,linestyle=dashed,dash=2pt 2pt}
\ncline{->}{11}{7}  \ncput*{\small\red a}
\ncline{->}{7}{1}   \ncput*{\small\red b}
\ncline{->}{1}{7}   \ncput*{\small\red c}
\ncline{->}{7}{2}   \ncput*{\small\red d}
\ncline{->}{2}{7}   \ncput*{\small\red e}
\ncline{->}{7}{11}  \ncput*{\small\red f}
\ncline{->}{11}{10} \ncput*{\small\red g}
\ncline{->}{10}{3}  \ncput*{\small\red h}
\ncline{->}{3}{10}  \ncput*{\small\red i}
\ncline{->}{10}{9}  \ncput*{\small\red j}
\ncline{->}{9}{8}   \ncput*{\small\red k}
```

```
\ncline{->}{8}{4}   \ncput*{\small\red l}
\ncline{->}{4}{8}   \ncput*{\small\red m}
\ncline{->}{8}{5}   \ncput*{\small\red n}
\ncline{->}{5}{8}   \ncput*{\small\red o}
\ncline{->}{8}{9}   \ncput*{\small\red p}
\ncline{->}{9}{6}   \ncput*{\small\red q}
\ncline{->}{6}{9}   \ncput*{\small\red r}
\ncline{->}{9}{10}  \ncput*{\small\red s}
\ncline{->}{10}{11} \ncput*{\small\red t}
```

L'explication est assez simple : `\ncline{->}{11}{7}` trace une flèche (en rouge et en pointillés) du nœud 11 vers le nœud 7 et `\ncput*{\small\red a}` écrit la lettre a (en petit et en rouge) au milieu de cette flèche.

Cela donne :




En suivant les flèches en ordre alphabétique, on parcourt l'arbre. On se rend compte que chaque nœud est vu trois fois : une fois par la gauche, une fois par le dessous, une fois par la droite. Par souci de simplification, je n'ai écrit les opérandes qu'une seule fois.
Sur chaque opérateur, il y a un numéro : 1 quand c'est la première fois qu'on le rencontre, 2 quand c'est la deuxième et 3 quand c'est la troisième.

Voici ce que donne ce parcours d'arbre :

$$\overset{1}{+}\ \overset{1}{\times}\ \mathbf{2}\ \overset{2}{\times}\ \mathbf{3}\ \overset{3}{\times}\ \overset{2}{+}\ \overset{1}{\times}\ \mathbf{4}\ \overset{2}{\times}\ \overset{1}{-}\ \overset{1}{\times}\ \mathbf{5}\ \overset{2}{\times}\ \mathbf{6}\ \overset{3}{\times}\ \overset{2}{-}\ \mathbf{7}\ \overset{3}{-}\ \overset{3}{\times}\ \overset{3}{+}$$

Mais il ne faut garder qu'une seule fois chaque opérateur.

- Si on écrit l'opérateur la première fois qu'on le rencontre, c'est l'écriture préfixée :

$$\overset{1}{+}\ \overset{1}{\times}\ \mathbf{2}\ \mathbf{3}\ \overset{1}{\times}\ \mathbf{4}\ \overset{1}{-}\ \overset{1}{\times}\ \mathbf{5}\ \mathbf{6}\ \mathbf{7}$$

- Si on écrit l'opérateur la deuxième fois qu'on le rencontre, c'est l'écriture infixée :

$$\mathbf{2}\ \overset{\mathbf{2}}{\times}\ \mathbf{3}\ \overset{\mathbf{2}}{+}\ \mathbf{4}\ \overset{\mathbf{2}}{\times}\ \mathbf{5}\ \overset{\mathbf{2}}{\times}\ \mathbf{6}\ \overset{\mathbf{2}}{-}\ \mathbf{7}$$

  Mais cette écriture correspond à plusieurs expressions algébriques comme $2\times3+4\times5\times6-7$ ou $2\times(3+4)\times5\times(6-7)$ ou...
  Il faut donc une règle supplémentaire quand on parcourt l'arbre : on rajoute une parenthèse ouvrante quand on rentre dans un sous-arbre et on la referme quand on sort de ce sous-arbre. Cela donne donc :

$$\mathbf{(2\times3)+(4\times((5\times6)-7)}$$

  Un peu lourd, mais c'est comme ça qu'on écrirait l'expression si on ne connaissait pas les priorité des opérations !

- Si on écrit l'opérateur la troisième (et dernière) fois qu'on le rencontre, c'est l'écriture post-fixée :

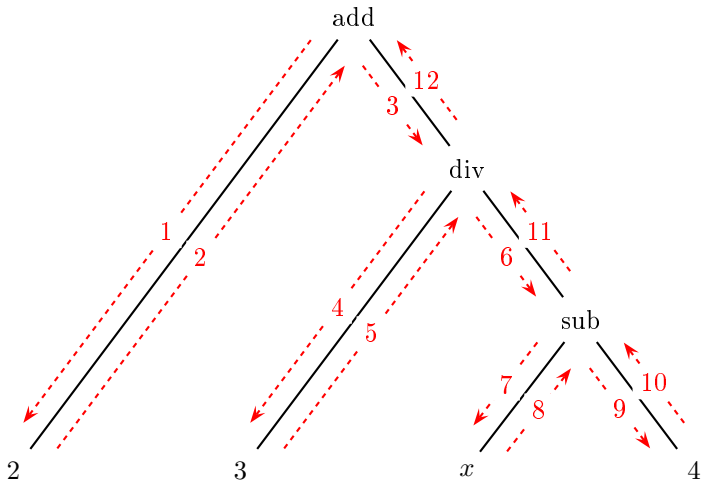
$$\mathbf{2\ 3}\ \overset{\mathbf{3}}{\times}\ \mathbf{4\ 5\ 6}\ \overset{\mathbf{3}}{\times}\ \mathbf{7}\ \overset{\mathbf{3}}{-}\ \overset{\mathbf{3}}{\times}\ \overset{\mathbf{3}}{+}$$

  C'est de cette façon qu'on définit les fonctions en LaTeX et elle sont traitées par une pile.

## 8.3 Expression algébrique

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}\setminus\{4\}$ par $f(x)=\dfrac{2x-5}{x-4}$.

Pour écrire en mode post-fixe cette expression, il vaut mieux l'écrire $f(x)=2+\dfrac{3}{x-4}$.
Voici l'arbre :



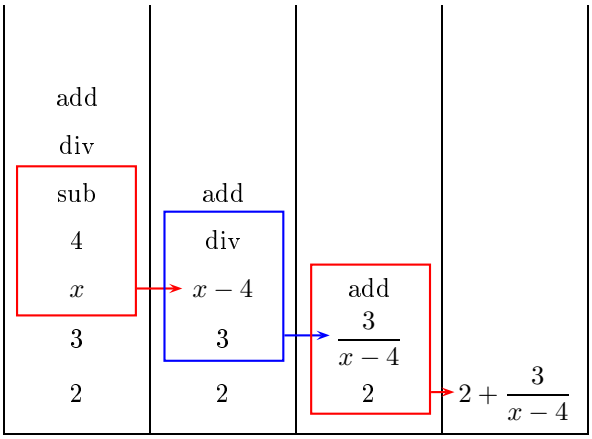

En LaTeX les opérations sont désignées par `add`, `sub`, `mul` et `div`.
Et voici le parcours « complet » de l'arbre :

$$\overset{\mathbf{1}}{\mathbf{add}}\ \mathbf{2}\ \overset{\mathbf{2}}{\mathbf{add}}\ \overset{\mathbf{1}}{\mathbf{div}}\ \mathbf{3}\ \overset{\mathbf{2}}{\mathbf{div}}\ \overset{\mathbf{1}}{\mathbf{sub}}\ \boldsymbol{x}\ \overset{\mathbf{2}}{\mathbf{sub}}\ \mathbf{4}\ \overset{\mathbf{3}}{\mathbf{sub}}\ \overset{\mathbf{3}}{\mathbf{div}}\ \overset{\mathbf{3}}{\mathbf{add}}$$

qui donne en version post-fixée :

$$\mathbf{2\ 3\ x\ 4\ \overset{3}{sub}\ \overset{3}{div}\ \overset{3}{add}}$$

Concrètement, l'expression est calculée au moyen d'une pile ; les termes sont empilés dans leur ordre de lecture et on les dépile 3 par 3 dès qu'on rencontre un opérateur qui s'applique alors aux deux opérandes situés dessous :



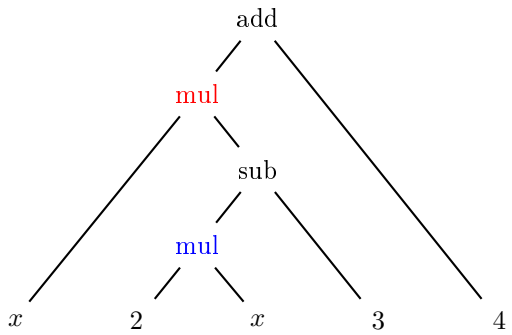

On peut aussi en expliquer le fonctionnement au moyen de boîtes imbriquées :

$$\mathbf{2\ \boxed{3\ \boxed{x\ 4\ sub}\ div}\ add}$$

Je ne parle ici que d'opérateurs binaires car si on rencontre $-x$, on peut le traiter comme $-1 \times x$ c'est-à-dire : $-1\ x$ mul.

## 8.4 Autre exemple

Soit l'expression $2x^2 - 3x + 4$ que l'on écrit $x\times(2\times x - 3) + 4$.




Ce qui donne :

$$\mathbf{\boxed{x\ \boxed{2\ x\ mul}\ 3\ sub\ mul}\ 4\ add}$$

À vous de jouer maintenant...