

# Les nombres ultimes et le ratio $3/2$

## *The ultimate numbers and the $3/2$ ratio*

Jean-Yves BOULAY

*Abstract.* According to a new mathematical definition, whole numbers are divided into two sets, one of which is the merger of the sequence of prime numbers and numbers zero and one. Three other definitions, deduced from this first, subdivide the set of whole numbers into four classes of numbers with own and unique arithmetic properties. The geometric distribution of these different types of whole numbers, in various closed matrices, is organized into exact value ratios to  $3/2$  or  $1/1$

AMS subject classification: 11A41-11R29-11R21-11B39-11C20

Keywords: prime numbers, whole numbers, Sophie Germain numbers, Symmetry.

### Résumé

Selon une nouvelle définition mathématique, les nombres entiers naturels se divisent en deux ensembles dont l'un est la fusion de la suite des nombres premiers et des nombres zéro et un. Trois autres définitions, déduites de cette première, subdivisent l'ensemble des nombres entiers naturels en quatre classes de nombres aux propriétés arithmétiques propres et uniques. La distribution géométrique de ces différents types d'entiers naturels, dans de diverses matrices fermées, s'organise en ratios exacts de valeur  $3/2$  ou  $1/1$ .

### 1. Introduction

Cette étude investit l'ensemble des nombres\* entiers naturels et propose une définition mathématique permettant d'intégrer le nombre zéro (0) et le nombre un (1) à la suite des nombres dits premiers. Cet ensemble est nommé l'ensemble des nombres ultimes. L'étude de nombreuses matrices de nombres comme, par exemple, le tableau des additions croisées des dix chiffres nombres (de 0 à 9) met en évidence une organisation arithmétique et géographique non aléatoire de ces nombres ultimes. Il apparaît en outre que cette distinction des nombres ultimes et non ultimes (comme aussi d'autres distinctions proposées de différentes classes de nombres entiers naturels) est intimement liée au système décimal, notamment et principalement par une opposition quasi systématique des entités en un ratio de  $3/2$ . Ce ratio ne peut en effet se manifester qu'en présence de multiples de cinq ( $10/2$ ) entités. Aussi, c'est à l'intérieur de matrices de dix fois dix nombres que sont faites la majorité des démonstrations validant une opposition d'entités en divers ratios de valeur  $3/2$  ou/et de valeur  $1/1$ .

\* Dans les énoncés, lorsque ceci n'est pas spécifié, le terme "nombre" sous-entend toujours "nombre entier naturel". Aussi est-il convenu que le nombre zéro (0) est bien intégré à l'ensemble des nombres entiers naturels.

### 2. Les nombres ultimes

#### 2.1 Définition d'un nombre ultime

Considérant l'ensemble des nombres entiers naturels, ceux-ci s'organisent en deux ensembles : les nombres ultimes et les nombres non ultimes.

Définition des nombres ultimes :

*Un nombre ultime n'admet aucun diviseur non trivial (nombre entier naturel) lui étant inférieur.*

Définition des nombres non ultimes :

*Un nombre non ultime admet au moins un diviseur non trivial (nombre entier naturel) lui étant inférieur.*

Remarque : un diviseur non trivial d'un nombre entier naturel  $n$  est un entier naturel diviseur de  $n$  mais distinct de  $n$  et de 1 (qui sont ses diviseurs triviaux).

#### 2.2. Les dix premiers nombres ultimes et dix premiers nombres non ultimes

Considérant la double définition précédente, la suite des nombres ultimes s'initialise par ces dix nombres :

*0 1 2 3 5 7 11 13 17 19*

Considérant la double définition précédente, la suite des nombres non ultimes s'initialise par ces dix nombres :

*4 6 8 9 10 12 14 15 16 18*

### 2.3 Développement

Ci-dessous sont listés, pour illustration de définition, quelques-uns des premiers nombres ultimes ou non ultimes définis plus haut, notamment les nombres particuliers zéro (0) et un (1).

- 0 est ultime : bien qu'il admette une quantité infinie de diviseurs lui étant supérieurs, puisqu'il est le **premier nombre entier naturel**, le nombre 0 n'admet aucun diviseur **lui étant inférieur**.
- 1 est ultime : puisque la division par 0 n'a pas de résultat défini, le nombre 1 n'admet aucun diviseur (nombre entier naturel) lui étant inférieur.
- 2 est ultime : puisque la division par 0 n'a pas de résultat défini, le nombre 2 n'admet aucun diviseur\* lui étant inférieur.
- 4 est non ultime : le nombre 4 admet le nombre 2 (nombre lui étant inférieur) pour diviseur\*.
- 6 est non ultime : le nombre 6 admet les nombres 2 et 3 (nombres lui étant inférieurs) pour diviseurs\*.
- 7 est ultime : puisque la division par 0 n'a pas de résultat défini, le nombre 7 n'admet aucun diviseur\* lui étant inférieur. Les diviseurs non triviaux 2, 3, 4, 5 et 6, ne peuvent le diviser en nombres entiers naturels.
- 12 est non ultime : le nombre 12 admet les nombres 2, 3, 4 et 6 (nombres lui étant inférieurs) pour diviseurs\*.

Ainsi, par ces précédentes définitions, l'ensemble des nombres entiers naturels s'organise en ces deux entités :

- l'ensemble des nombres ultimes, qui est la fusion de la suite des nombres premiers et des nombres 0 et 1.
- l'ensemble de nombres non ultimes s'identifiant à la suite des nombres non premiers, déduite des nombres 0 et 1.

\*diviseur non trivial.

### 2.4 Appellations conventionnelles

Comme "premiers" désigne des nombres premiers, il est convenu que la désignation "ultimes" désigne des nombres ultimes. Il est également convenu que la désignation "non ultimes" désigne des nombres non ultimes. D'autres désignations conventionnelles seront appliquées aux différentes classes ou types de nombres entiers naturels présentés ultérieurement.

### 2.5 Les nombres ultimes et le système décimal

Il s'avère que le dixième nombre ultime est le nombre 19, nombre situé à la vingtième place dans la suite des entiers naturels. Cette particularité lie indéniablement les nombres ultimes et le système décimal. Ainsi les vingt premiers nombres (deux fois dix nombres) s'organisent en différents ratios 1/1 et 3/2 selon leurs différents attributs.

De par la nature du système décimal, comme l'illustre la figure 1, les dix chiffres nombres (chiffres confondus comme nombres) s'opposent au dix premiers non chiffres nombres par un ratio de 1/1. Aussi, se trouve-t-il exactement le même nombre d'ultimes et de non ultimes parmi ces vingt nombres, soit dix entités de chaque catégorie. Dans un double ratio de valeur 3/2, six ultimes contre quatre se trouvent parmi les dix chiffres nombres et six non ultimes contre quatre se trouvent parmi les dix premiers non chiffres nombres.

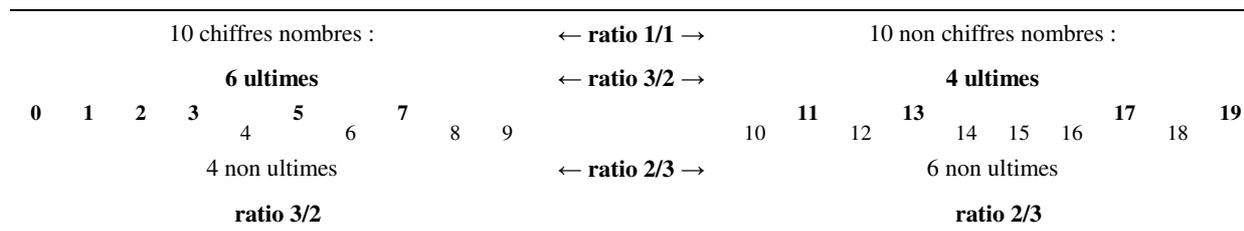


Fig.1 Différenciation des 20 nombres fondamentaux selon leur digitalité ou non digitalité : les 10 chiffres nombres (chiffres confondus comme nombres) et les 10 premiers nombres non digitaux.

Comme exposé figure 2, il est aussi possible de décrire ce phénomène arithmétique par croisement des critères. Ainsi, les dix premiers ultimes s'opposent au dix non ultimes par un ratio de valeur 1/1. Aussi, se trouve-t-il exactement le même nombre de chiffres nombres et de non chiffres nombres parmi ces vingt nombres. Dans un double ratio de 3/2, six chiffres nombres contre quatre se trouvent parmi les dix ultimes et six non chiffres nombres contre quatre se trouvent parmi les dix premiers non ultimes.

10 premiers nombres ultimes :	← <b>ratio 1/1</b> →	10 premiers nombres non ultimes :
<b>6 chiffres nombres</b>	← <b>ratio 3/2</b> →	<b>4 chiffres nombres</b>
0 1 2 3 5 7 11 13 17 19		4 6 8 9 10 12 14 15 16 18
4 non chiffres nombres	← <b>ratio 2/3</b> →	6 non chiffres nombres
<b>ratio 3/2</b>		<b>ratio 2/3</b>

Fig.2 Différenciation des 20 nombres fondamentaux selon leur ultimité ou non ultimité : 10 ultimes contre 10 non ultimes.

## 2.6 Les vingt nombres fondamentaux

La suite des nombres entiers naturels s'initialise donc par vingt nombres aux caractéristiques symétriquement et asymétriquement complémentaires de ratios 1/1 et 3/2 réversibles. Cette intrication transcendante des vingt premiers nombres selon leur nature ultime ou non ultime (nombres ultimes ou nombres non ultimes) et selon leur nature digitale ou non digitale (chiffres nombres ou non chiffres nombres) permet, par convention, de les qualifier de *nombres fondamentaux* parmi l'ensemble des entiers naturels. La figure 3 décrit la totale intrication de ces vingt nombres fondamentaux.

	digitalité		
ultimité	0 1 2 3 5 7	4 6 8 9	non ultimité
	11 13 17 19	10 12 14 15 16 18	
	non digitalité		

Fig.3 Intrication des 20 nombres fondamentaux selon leur ultimité ou non ultimité et leur digitalité ou non digitalité.

Ainsi, l'ensemble des vingt premiers nombres entiers naturels est simultanément constitué d'un ensemble de vingt entités dont dix nombres ultimes et dix nombres non ultimes et d'un (même) ensemble de vingt entités dont dix chiffres nombres (10 digitaux) et dix non chiffres nombres (non digitaux). Aussi, chacun de ces quatre sous ensembles intriqués de dix entités aux propriétés propres s'opposant deux à deux en ratio de valeur 1/1 est composé de deux sous ensembles s'opposant en ratio de valeur 3/2 selon les propriétés mixtes de ses composants. Cet ensemble des vingt premiers nombres est défini comme l'ensemble des nombres fondamentaux parmi les entiers naturels.

Aussi, il est donc convenu que la désignation "fondamentaux" désigne ces vingt nombres fondamentaux précédemment définis.

## 2.7 Les trente nombres initiaux

Aussi, selon la considération progressive de trois ensembles de 10, de 20 puis de 30 entités (les trente premiers nombres entiers naturels), le ratio entre les nombres ultimes et non ultimes progresse de 3/2 (10 nombres) à 1/1 (20 nombres) puis bascule à 2/3 (30 nombres). Ainsi (figure 4), selon que l'on considère les dix premiers, les vingt premiers puis les trente premiers entiers naturels, 6 ultimes s'opposent à 4 non ultimes, puis 10 ultimes s'opposent à 10 non ultimes puis enfin 12 ultimes s'opposent à 18 non ultimes. Au delà de ce triple ensemble, aucune organisation semblable de groupes (consécutifs) de dix entités ne s'opère. Ces trente nombres sont donc ici qualifiés d'*initiaux* parmi l'ensemble des entiers naturels.

<b>30 nombres initiaux</b>		
<b>20 nombres fondamentaux</b>		
<b>10 chiffres nombres</b>		
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	10 11 12 13 14 15 16 17 18 19	20 21 22 23 24 25 26 27 28 29
<b>6 ultimes / 4 non ultimes : ratio 3/2</b>		
<b>10 ultimes / 10 non ultimes : ratio 1/1</b>		
<b>12 ultimes / 18 non ultimes : ratio 2/3</b>		

Fig.4 Basculement du ratio 3/2 vers le ratio 2/3 selon le classement des trente premiers nombres entiers naturels et leur degré d'ultimité.

### 3. Matrice d'additions des dix chiffres nombres

Le tableau figure 5 représente la matrice des cent différentes sommes possibles des additions (croisées) des dix chiffres nombres (de 0 à 9) du système décimal (soit les dix premiers nombres entiers naturels). A l'intérieur de ce tableau s'opèrent de multiples phénomènes arithmétiques singuliers selon la nature ultime ou non ultime des valeurs de ces cent sommes et de leur distribution géographique dont principalement divers ratios de valeur 3/2 souvent transcendants.

#### 3.1 Soixante contre quarante nombres : ratio 3/2

Parmi ces cent valeurs, se trouvent 40 nombres ultimes ( $5x \rightarrow x = 8$ ) et consécutivement 60 non ultimes ( $5y \rightarrow y = 12$ ). Ces deux ensembles s'opposent donc en un ratio exact de valeur 2/3.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
<b>40 ultimes</b>	6	5 + 5	4 + 4 + 4	3 + 3 + 3 + 3						
	1(n)	2(n-1)	3(n-2)	4(n-3)						
60 non ultimes	4	5 + 5	6 + 6 + 6	7 + 7 + 7 + 7						
	$(2n/3)$	$2((2n/3) + 1)$	$3((2n/3) + 2)$	$4((2n/3) + 3)$						

Fig.5 Tableau d'additions croisées des dix chiffres nombres.

Aussi, les quantités des valeurs égales à un nombre ultime décroissent régulièrement de 6 entités ( $n$ ) à 3 de la première colonne à la dixième. Cette décroissance se singularise par un double phénomène arithmétique : la première colonne, qui représente les additions des dix chiffres nombres avec le premier de ceux-ci (0), totalisent donc un nombre de valeur unique de 6 ultimes ( $n$ ) ; les deux colonnes suivantes totalisent deux mêmes nombres d'ultimes et ce nombre (5) est juste inférieur d'une unité à celui de la première colonne d'addition ; les trois colonnes suivantes totalisent trois mêmes nombres (4) inférieurs d'une unité aux deux colonnes précédentes puis enfin, les quatre colonnes finales poursuivent et clôturent ce régulier arrangement arithmétique avec quatre mêmes valeurs de nombres non ultimes (3) aussi inférieurs d'une unité aux trois colonnes précédentes. Le même arrangement arithmétique s'observe pour le décompte des valeurs égales à un nombre non ultime mais dans un sens croissant des valeurs des nombres non ultimes décomptés et avec un nombre source (4) égal à  $2n/3$ . De par la nature de ce tableau croisé, le même phénomène s'opère naturellement de ligne en ligne.

Dans cette matrice, les colonnes d'additions se regroupent donc par une, deux, trois puis quatre entités arithmétiques. Aussi, depuis la valeur  $n$  (6 ultimes en première colonne d'additions), la somme totale d'ultimes est obtenue par cette formule :

$$n + 2(n - 1) + 3(n - 2) + 4(n - 3)$$

La somme totale de non ultimes est obtenue par cette autre formule :

$$(2n/3) + 2((2n/3) + 1) + 3((2n/3) + 2) + 4((2n/3) + 3)$$

Ce phénomène est directement en relation avec le système décimal s'organisant depuis dix entités : la valeur 10 est en effet égale à la somme de quatre progressives valeurs :  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ .

#### 3.2 Vingt-quatre contre seize ultimes : ratio 3/2

Parmi les 50 sommes égales à l'addition des 10 chiffres nombres (de 0 à 9) avec les 5 premiers chiffres nombres (de 0 à 4), se trouvent 24 nombres ultimes et parmi les 50 sommes égales à l'addition des 10 chiffres nombres (de 0 à 9) avec les 5 derniers chiffre nombres (de 5 à 9), se trouvent 16 nombres ultimes. Ces deux groupes s'opposent donc (figure 6) dans un ratio de 3/2.







Cet arithmétique permet, en relation avec le système décimal et par l'intercalément des anneaux incorporés, la constitution de sous matrices s'opposant, en taille, et en catégorie de nombres, en ratios de valeurs 3/2.

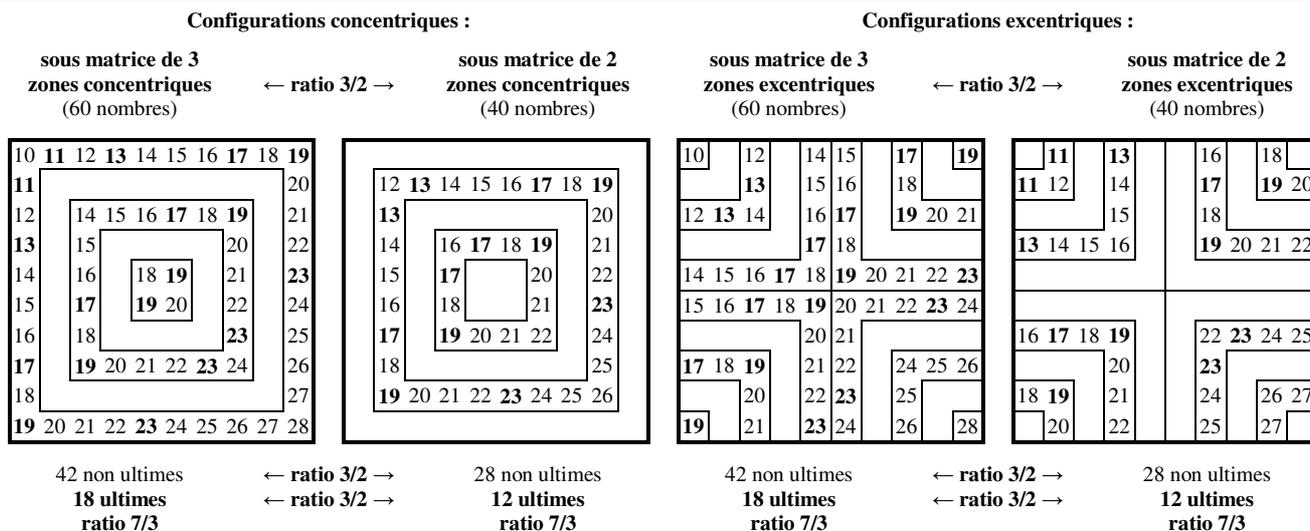


Fig.13 Depuis la matrice d'additions des vingt nombres fondamentaux, configurations concentriques et excentriques de sous matrices de 60 et 40 entités opposant leurs non ultimes et leurs ultimes en ratios 3/2.

Aussi, en mixant, figure 14, les sous matrices de 40 et 60 entités présentées figure 13 et après les avoir chacune scindées verticalement en deux parties égales de 30 et 20 entités, obtient-on de nouvelles matrices de 50 entités chacune. Dans ces configurations mixtes, les non ultimes et les ultimes se répartissent en exact ratios de valeur 1/1 avec toujours 35 non ultimes contre 35 et toujours 15 ultimes contre 15. Ces réassemblages sont exactement de même type que ceux proposés figure 12.

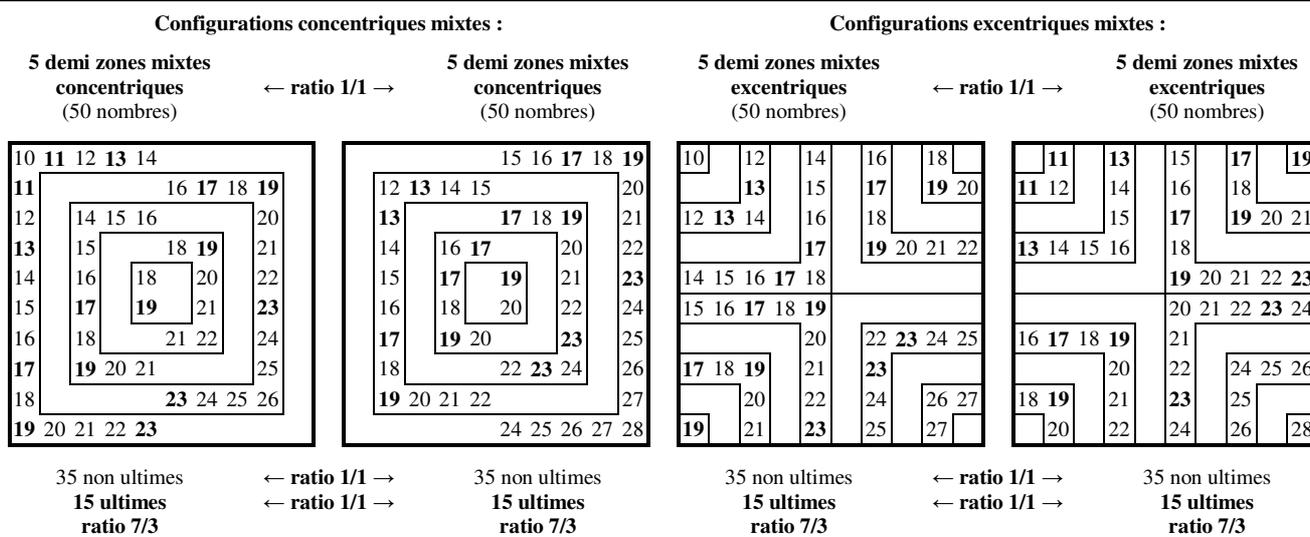


Fig.14 Depuis la matrice d'additions des vingt nombres fondamentaux, configurations concentriques et excentriques mixtes de sous matrices de chacune 50 entités opposant leurs non ultimes et leurs ultimes en ratios 3/2.

#### 4.2.1 Progressions arithmétiques

D'autres agencements, comme l'exemple figure 15, de trois contre deux zones concentriques ou trois contre deux zones excentriques génèrent les mêmes phénomènes arithmétiques de ratio 3/2 entre les quantités d'ultimes respectifs de ces ensembles de zones. Ce phénomène est directement en relation avec la régulière progression de la valeur des quantités d'ultimes de 2 à 10 selon la dimension des zones concentriques ou excentriques considérées.

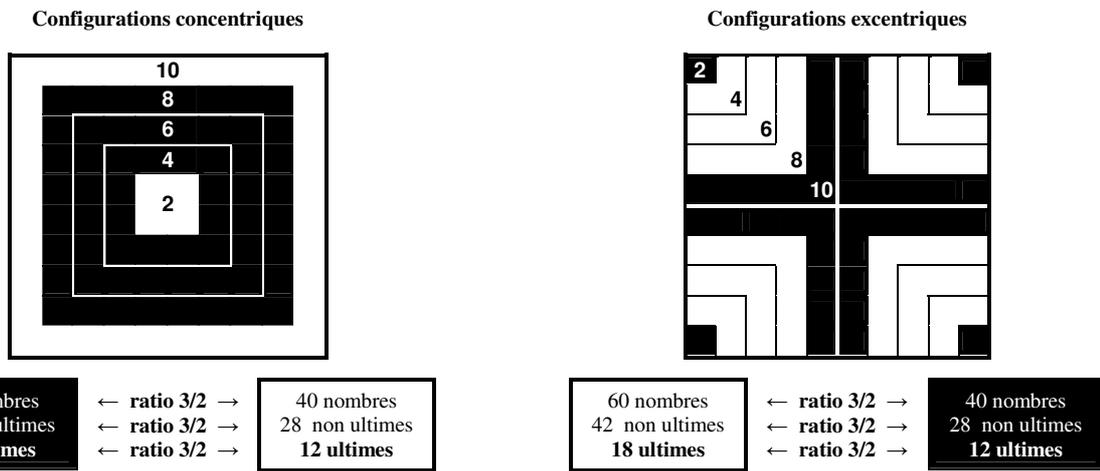


Fig.15 Régulière répartition arithmétique des nombres ultimes dans les anneaux concentriques et excentriques de la matrice d'additions des vingt nombres fondamentaux. Exemple d'arrangement de ratio 3/2 (voir aussi fig.13).

Dans chacune des cinq zones concentriques de la matrice d'addition des vingt nombres fondamentaux, la quantité de nombres ultimes ( $x$ ) est liée à la quantité totale de nombres ( $z$ ) de cette zone par cette formule :

$$x^2 - (x - 2)^2 = z$$

Dans ces mêmes zones, la quantité de nombres non ultimes ( $y$ ) est liée à la quantité de nombres ultimes ( $x$ ) par cette formule :

$$x^2 - (x - 2)^2 - x = y$$

Ce phénomène reste identique pour les cinq zones symétriquement excentriques.

quantité de nombres par zone* ( $z$ )	quantité de nombres ultimes ( $x$ )	quantité de nombres non ultimes ( $y$ )
$x^2 - (x - 2)^2 = z$	$x$	$x^2 - (x - 2)^2 - x = y$
$2^2 - (2 - 2)^2 = 4$	<b>2</b>	2
$4^2 - (4 - 2)^2 = 12$	<b>4</b>	8
$6^2 - (6 - 2)^2 = 20$	<b>6</b>	14
$8^2 - (8 - 2)^2 = 28$	<b>8</b>	20
$10^2 - (10 - 2)^2 = 36$	<b>10</b>	26

Fig.16 Relation arithmétique entre la valeur de la quantité d'ultimes (et de non ultimes) et la dimension de la zone concentrique\* ou excentrique\* considérée dans la matrice d'addition des vingt fondamentaux.

## 5. Matrice des cent premiers nombres

L'étude de la matrice des cent premiers nombres entiers naturels configurée en dix lignes de dix nombres classés de 0 à 99 révèle plusieurs phénomènes singuliers selon les différentes classifications considérées des entités qui la composent. Ces phénomènes seront introduits dans différents chapitres dont, pour débiter, ce chapitre distinguant les couples de nombres à ultimes de ceux sans ultimes.

### 5. 1 Nombres ultimes et couples de nombres

Dans la matrice des cent premiers nombres, 25 couples de nombres adjacents incluant au moins un ultime s'opposent, dans un ratio exact de 1/1, à 25 autres couples n'en incluant aucun. Depuis le couple de nombres 0-1 vers le couple de nombres 98-99, ces 50 couples sont toujours formés de deux nombres consécutifs comme illustré figure 17. Bien que 27 nombres ultimes soient présents dans la suite des 100 premiers nombres, seul 25 couples intégrant au moins un ultime émergent dans cette matrice. Ceci est dû au fait que les quatre premiers nombres ultimes sont aussi les quatre premiers nombres entiers naturels et donc qu'ils soient consécutifs, le premier nombre non ultime (4) étant en cinquième position dans la suite des nombres. Aussi, seuls ces quatre ultimes sont consécutifs.

#### 5. 1.1 Deux fois vingt-cinq couples de nombres

Comme illustré figure 17, il s'avère que les 25 couples avec ultimes et les 25 couples sans ultimes s'opposent en ratios 3/2 transcendants selon qu'ils soient issus de la partie supérieure ou de la partie inférieure de la matrice des cent premiers nombres. Ainsi, parmi les 25 premiers couples, dans un ratio de 3/2, 15 sont constitués d'ultimes et 10 de non ultimes et parmi les 25 derniers couples, dans un ratio inverse de 2/3, 10 sont constitués d'ultimes et 15 de non ultimes.

15 couples avec ultimes	← ratio 3/2 →	10 couples sans ultimes	0 1   2 3   4 5   6 7   8 9	25 couples avec ultimes 25 couples sans ultimes
			10 11   12 13   14 15   16 17   18 19	
10 couples avec ultimes	← ratio 2/3 →	15 couples sans ultimes	20 21   22 23   24 25   26 27   28 29	
			30 31   32 33   34 35   36 37   38 39	
↑ ratio 3/2 ↓		↑ ratio 2/3 ↓	40 41   42 43   44 45   46 47   48 49	
			50 51   52 53   54 55   56 57   58 59	
10 couples avec ultimes	← ratio 2/3 →	15 couples sans ultimes	60 61   62 63   64 65   66 67   68 69	
			70 71   72 73   74 75   76 77   78 79	
↑ ratio 3/2 ↓		↑ ratio 2/3 ↓	80 81   82 83   84 85   86 87   88 89	
			90 91   92 93   94 95   96 97   98 99	

Fig.17 Distribution des 25 couples avec ultimes et des 25 couples sans ultime dans la matrice des cent premiers nombres.

### 5. 1.2 Intrication des couples de nombres

Aussi, pour chacune des deux parties supérieures et inférieures de cette matrice, leur scission en deux ensembles de 3 et 2 lignes alternées telle qu'illustré figure 18 génère une multitude de phénomènes arithmétiques intriqués se traduisant toujours en ratios de valeur 3/2 ou de ratios opposés de valeur 2/3 simultanément selon la zone considérée et la nature du couple considéré (avec ou sans ultimes).

9 couples avec ultimes 6 couples sans ultimes ratio 3/2	← ratio 3/2 → ← ratio 3/2 →	6 couples avec ultimes 4 couples sans ultimes ratio 3/2
0 1   2 3   4 5   6 7   8 9	← ratio 3/2 →	10 11   12 13   14 15   16 17   18 19
20 21   22 23   24 25   26 27   28 29		30 31   32 33   34 35   36 37   38 39
↑ ratio* 3/2 ↓    ↑ ratio** 2/3 ↓		↑ ratio* 3/2 ↓    ↑ ratio** 2/3 ↓
50 51   52 53   54 55   56 57   58 59	← ratio 3/2 →	60 61   62 63   64 65   66 67   68 69
70 71   72 73   74 75   76 77   78 79		80 81   82 83   84 85   86 87   88 89
6 couples avec ultimes 9 couples sans ultimes ratio 2/3	← ratio 3/2 → ← ratio 3/2 →	4 couples avec ultimes 6 couples sans ultimes ratio 2/3

Fig.18 Forte intrication de la distribution des 25 couples avec ultimes et des 25 couples sans ultime dans la matrice des cent premiers nombres. Ratios entre couples respectivement avec ultimes\* et sans ultimes\*\*.

### 5. 2 Sous matrices de trente contre vingt couples de nombres

Depuis la matrice des 50 premiers couples de nombres entiers naturels, dans les sous matrices constituées de cinq zones verticalement alternés de 3/5<sup>ème</sup> de colonne (30 couples de nombres) tel que celles présentées figure 19 et dans les sous matrices complémentaires de cinq zones de 2/5<sup>ème</sup> de colonne (20 couples), les quantités de couples à ultimes et celles des couples sans ultime restent d'égales valeurs et s'opposent en ratios 3/2 aux valeurs respectives des sous matrices complémentaires.

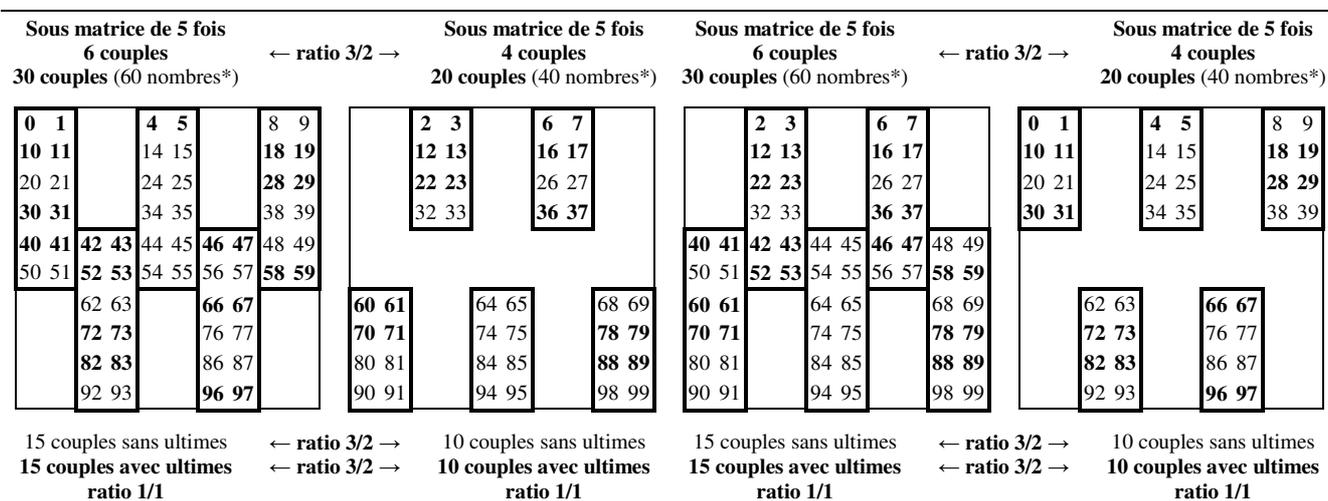


Fig.19 Egale distribution des 25 couples avec ultimes et des 25 couples sans ultime dans des sous matrices de 30 contre 20 couples.

Aussi, toujours depuis cette même matrice de 50 couples de nombres, dans des sous matrices symétriques constituées de 10 zones de 3 couples de nombres contre 10 zones de 2 couples, telles qu'illustrées figure 20, les quantités de couples de nombres à ultimes et celles de couples sans ultime restent d'égaux valeurs et s'opposent en ratios 3/2 aux valeurs respectives des sous matrices complémentaires.

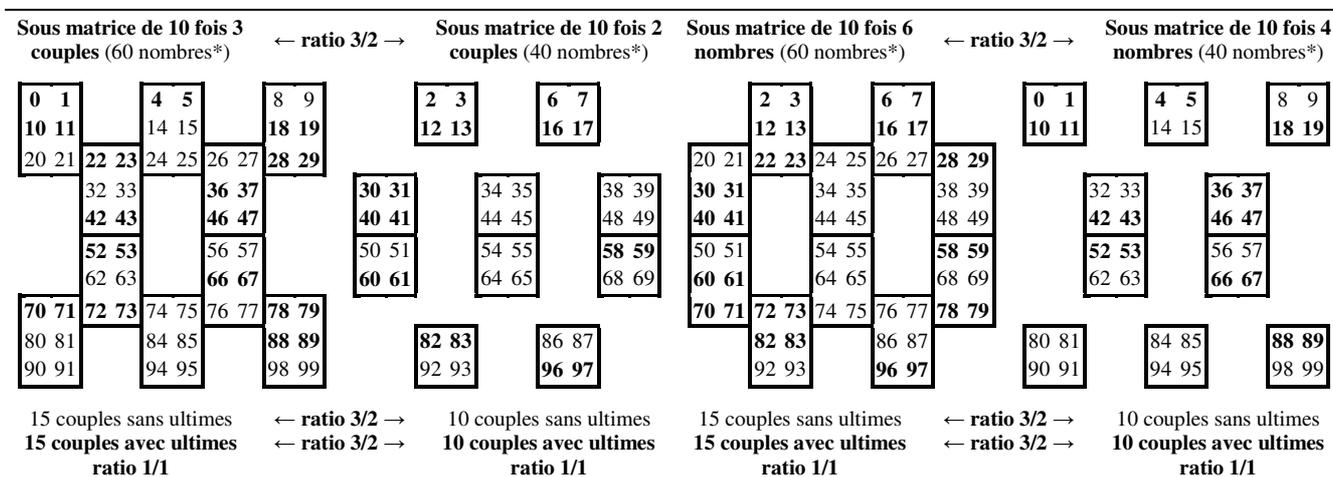


Fig.20 Egale distribution des 25 couples avec ultimes et des 25 couples sans ultime dans des sous matrices symétriques de 30 contre 20 couples.

L'existence de ces phénomènes arithmétiques singuliers présentés dans ce chapitre renforcent grandement l'argument principal de cette étude des nombres entiers naturels de fusionner les nombres spéciaux zéro (0) et un (1) et la suite des nombres premiers en la suite des nombres ultimes. Ces phénomènes disparaissent en effet totalement sans cette fusion.

\*Remarque : Les configurations des deux types de sous matrices présentées dans les figures 19 et 20 s'inscrivent encore en variantes géométriques de l'identité remarquable  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  avec  $a$  et  $b$  de valeur respective 6 et 4 (pour des quantités d'entités de  $36 + 24$  et  $24 + 16$ ).

## 6. Les dix ultimes primordiaux

L'identification des dix premiers ultimes permet, en référence au système décimal, de les classer de primordiaux. Cette notion de primordialité est développée chapitre 9.

### 6.1 Matrice d'additions des dix ultimes primordiaux

Les additions croisées des dix premiers ultimes génèrent, figure 21, une matrice de cent valeurs dont trente nombres ultimes ( $5x \rightarrow x = 6$ ). Aussi ces additions génèrent-elles trente chiffres nombres.

	<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr> <td style="padding: 2px;">+</td> <td style="padding: 2px;">0</td> <td style="padding: 2px;">1</td> <td style="padding: 2px;">2</td> <td style="padding: 2px;">3</td> <td style="padding: 2px;">5</td> <td style="padding: 2px;">7</td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">0</td> <td style="padding: 2px;">0</td> <td style="padding: 2px;">1</td> <td style="padding: 2px;">2</td> <td style="padding: 2px;">3</td> <td style="padding: 2px;">5</td> <td style="padding: 2px;">7</td> <td style="padding: 2px;">11</td> <td style="padding: 2px;">13</td> <td style="padding: 2px;">17</td> <td style="padding: 2px;">19</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">1</td> <td style="padding: 2px;">1</td> <td style="padding: 2px;">2</td> <td style="padding: 2px;">3</td> <td style="padding: 2px;">4</td> <td style="padding: 2px;">6</td> <td style="padding: 2px;">8</td> <td style="padding: 2px;">11</td> <td style="padding: 2px;">13</td> <td style="padding: 2px;">17</td> <td style="padding: 2px;">19</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">2</td> <td style="padding: 2px;">2</td> <td style="padding: 2px;">3</td> <td style="padding: 2px;">4</td> <td style="padding: 2px;">5</td> <td style="padding: 2px;">7</td> <td style="padding: 2px;">9</td> <td style="padding: 2px;">12</td> <td style="padding: 2px;">14</td> <td style="padding: 2px;">18</td> <td style="padding: 2px;">20</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">3</td> <td style="padding: 2px;">3</td> <td style="padding: 2px;">4</td> <td style="padding: 2px;">5</td> <td style="padding: 2px;">6</td> <td style="padding: 2px;">8</td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px;">13</td> <td style="padding: 2px;">15</td> <td style="padding: 2px;">19</td> <td style="padding: 2px;">21</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">5</td> <td style="padding: 2px;">5</td> <td style="padding: 2px;">6</td> <td style="padding: 2px;">7</td> <td style="padding: 2px;">8</td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px;">10</td> <td style="padding: 2px;">14</td> <td style="padding: 2px;">16</td> <td style="padding: 2px;">20</td> <td style="padding: 2px;">22</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">7</td> <td style="padding: 2px;">7</td> <td style="padding: 2px;">8</td> <td style="padding: 2px;">9</td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px;">10</td> <td style="padding: 2px;">12</td> <td style="padding: 2px;">16</td> <td style="padding: 2px;">18</td> <td style="padding: 2px;">22</td> <td style="padding: 2px;">24</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px;">10</td> <td style="padding: 2px;">12</td> <td style="padding: 2px;">14</td> <td style="padding: 2px;">18</td> <td style="padding: 2px;">20</td> <td style="padding: 2px;">24</td> <td style="padding: 2px;">26</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">11</td> <td style="padding: 2px;">11</td> <td style="padding: 2px;">12</td> <td style="padding: 2px;">13</td> <td style="padding: 2px;">14</td> <td style="padding: 2px;">16</td> <td style="padding: 2px;">18</td> <td style="padding: 2px;">22</td> <td style="padding: 2px;">24</td> <td style="padding: 2px;">28</td> <td style="padding: 2px;">30</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">13</td> <td style="padding: 2px;">13</td> <td style="padding: 2px;">14</td> <td style="padding: 2px;">15</td> <td style="padding: 2px;">16</td> <td style="padding: 2px;">18</td> <td style="padding: 2px;">20</td> <td style="padding: 2px;">24</td> <td style="padding: 2px;">26</td> <td style="padding: 2px;">30</td> <td style="padding: 2px;">32</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">17</td> <td style="padding: 2px;">17</td> <td style="padding: 2px;">18</td> <td style="padding: 2px;">19</td> <td style="padding: 2px;">20</td> <td style="padding: 2px;">22</td> <td style="padding: 2px;">24</td> <td style="padding: 2px;">28</td> <td style="padding: 2px;">30</td> <td style="padding: 2px;">34</td> <td style="padding: 2px;">36</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">19</td> <td style="padding: 2px;">19</td> <td style="padding: 2px;">20</td> <td style="padding: 2px;">21</td> <td style="padding: 2px;">22</td> <td style="padding: 2px;">24</td> <td style="padding: 2px;">26</td> <td style="padding: 2px;">30</td> <td style="padding: 2px;">32</td> <td style="padding: 2px;">36</td> <td style="padding: 2px;">38</td> </tr> </table>	+	0	1	2	3	5	7				0	0	1	2	3	5	7	11	13	17	19	1	1	2	3	4	6	8	11	13	17	19	2	2	3	4	5	7	9	12	14	18	20	3	3	4	5	6	8		13	15	19	21	5	5	6	7	8		10	14	16	20	22	7	7	8	9		10	12	16	18	22	24						10	12	14	18	20	24	26	11	11	12	13	14	16	18	22	24	28	30	13	13	14	15	16	18	20	24	26	30	32	17	17	18	19	20	22	24	28	30	34	36	19	19	20	21	22	24	26	30	32	36	38	<p style="text-align: center;">30 chiffres nombres dont :</p> <p style="text-align: center;"><b>18 ultimes</b> ↑ ratio 3/2 ↓ 12 non ultimes</p>
+	0	1	2	3	5	7																																																																																																																																
0	0	1	2	3	5	7	11	13	17	19																																																																																																																												
1	1	2	3	4	6	8	11	13	17	19																																																																																																																												
2	2	3	4	5	7	9	12	14	18	20																																																																																																																												
3	3	4	5	6	8		13	15	19	21																																																																																																																												
5	5	6	7	8		10	14	16	20	22																																																																																																																												
7	7	8	9		10	12	16	18	22	24																																																																																																																												
					10	12	14	18	20	24	26																																																																																																																											
11	11	12	13	14	16	18	22	24	28	30																																																																																																																												
13	13	14	15	16	18	20	24	26	30	32																																																																																																																												
17	17	18	19	20	22	24	28	30	34	36																																																																																																																												
19	19	20	21	22	24	26	30	32	36	38																																																																																																																												
		<p style="text-align: center;"><b>30 ultimes</b> dont :</p> <p style="text-align: center;"><b>18 ultimes</b> chiffres nombres ↑ ratio 3/2 ↓ <b>12 ultimes</b> non chiffres nombres</p>																																																																																																																																				

Fig.21 Matrice d'addition des dix ultimes primordiaux.

Dans cette matrice, il s'avère que ces deux notions d'ultimité et de digitalité s'inscrivent en ratios 3/2 enchevêtrés. Ainsi, parmi les 30 chiffres nombres générés, se trouvent 18 ultimes contre 12 non ultimes et parmi les 30 ultimes, 18 se trouvent être chiffres nombres et 12 non chiffres nombres. Aussi, il s'avère que l'ensemble de ces 30 nombres ultimes générés par ces additions des dix premiers ultimes primordiaux sont tous des nombres fondamentaux, notion introduite chapitre 2.5.

### 6.2 Sous matrices de soixante et quarante entités

Illustré partie gauche de la figure 22, depuis la matrice d'additions des dix premiers ultimes, dans deux sous matrices de 60 contre 40 entités, les ultimes comme les non ultimes, se répartissent en ratios 3/2 avec, dans l'une et l'autre sous matrice, 42 non ultimes contre 28 et 18 ultimes contre 12.

Ces sous matrices sont constituées de zones de quatre fois 9, de (deux fois) quatre fois 6 puis quatre fois 4 entités. Ces valeurs (9→6→6→4) s'opposent en ratios 3/2 transcendants comme il sera plus largement introduit au prochain chapitre 7. Un autre agencement tel que celui présenté en partie droite de la figure 22 génère les mêmes phénomènes. Ce dernier agencement très particulier des zones considérées de matrices de cent entités est plus largement explicité au prochain chapitre 7 et illustré figure 26.

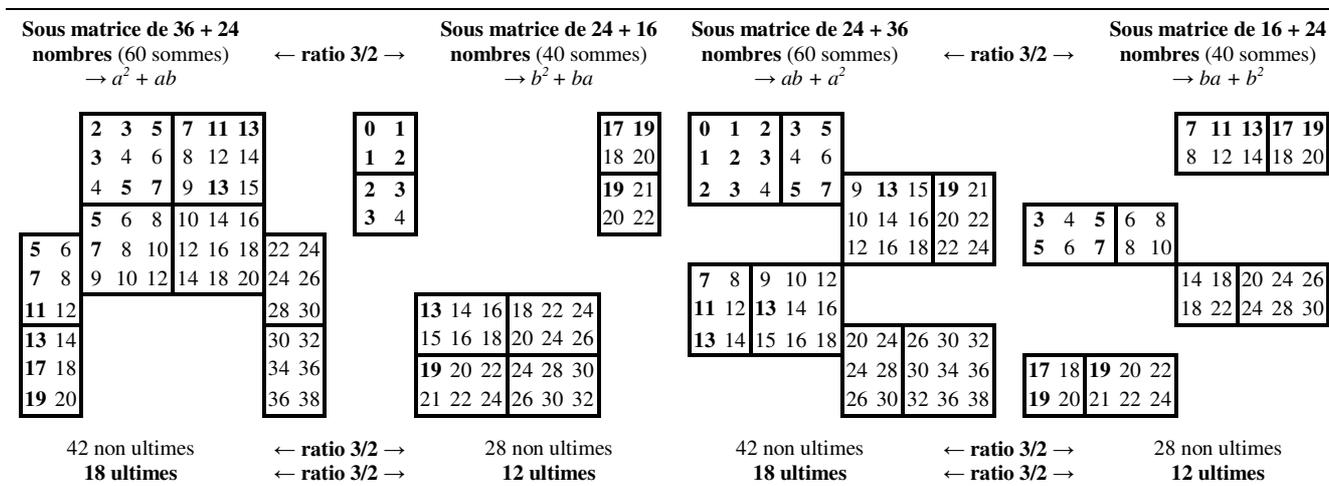


Fig.22 Sous matrices d'addition des dix ultimes primordiaux de 60 contre 40 nombres. Variante géométrique de l'identité remarquable (a + b)<sup>2</sup> = a<sup>2</sup> + 2ab + b<sup>2</sup>.

### 6.3 Triangle de Pascal des dix ultimes primordiaux

Dans un triangle de Pascal généré depuis les dix premiers nombres ultimes (de 0 à 19), il apparaît que sur l'ensemble des 55 valeurs le constituant (5x → x = 11), se trouvent 33 ultimes contre 22 non ultimes. Ceci donc dans un exact ratio de valeur 3/2. Aussi, il s'avère dans ce triangle de Pascal illustré figure 23 que la distinction des colonnes impaires et paires génère encore un ratio de 3/2 dans ces deux sous ensemble de 30 et 25 entités avec respectivement 18 ultimes contre 12 non ultimes et 15 ultimes contre 10 non ultimes.

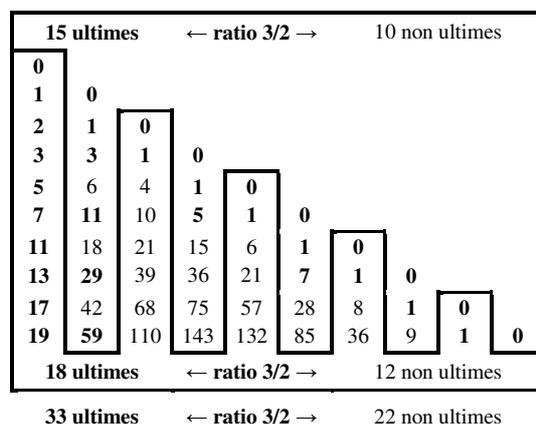


Fig.23 Triangle de Pascal des dix ultimes primordiaux générant des ensembles et des sous ensembles opposant les ultimes et les non ultimes en ratios 3/2.

## 7. Suites de Fibonacci et nombres ultimes

Il vient d'être démontré dans les précédents chapitres, que les nombre ultimes (dont aussi les nombres zéro et un) se répartissent non aléatoirement dans des matrices plus ou moins complexes d'additions de types de nombres (chiffres nombres, fondamentaux, ultimes primordiaux, etc.) Ici, de bien plus sophistiqués arrangements de nombres vont encore faire la démonstration d'une remarquable organisation de ces nombres entiers naturels selon leur nature ultime ou non ultime.

### 7.1 Matrice des dix suites de Fibonacci

La création de dix suites de Fibonacci de dix nombres et dont les deux nombres initiaux sont, en première position, les dix premiers ultimes et en seconde position les nombres ultimes suivants respectifs à ces dix premiers génère une matrice de cent nombres aux propriétés remarquables en rapport à la différenciation de distribution des nombres ultimes ou non ultimes ainsi créés dans cette matrice.

Il apparaît, figure 24, dans cette matrice de cent entités, qu'exactement 50 nombres ultimes ( $5x \rightarrow x = 10$ ) s'opposent à 50 autres non ultimes. Aussi, l'ensemble des six suites centrales (soixante nombres) totalise-il aussi un ratio exact de 1/1 entre la quantité d'ultimes et de non ultimes et cet ensemble s'oppose, dans un parfait ratio de 3/2, à celui des quatre suites périphériques totalisant également les mêmes quantités d'ultimes et de non ultimes.

	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34										
	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89										
	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144										
	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233										
50 ultimes ↑ ratio 1/1 ↓ 50 non ultimes	5	7	12	19	31	50	81	131	212	343										
	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521										
	11	13	24	37	61	98	159	257	416	673										
	13	17	30	47	77	124	201	325	526	851										
	17	19	36	55	91	146	237	383	620	1003										
	19	23	42	65	107	172	279	451	730	1181										

Fig. 24 Matrice des 10 premiers nombres des 10 suites de Fibonacci générées depuis les 10 premiers nombres ultimes.

#### 7.1.1 Quatre zones symétriques et identité remarquable

Une matrice de cent entités peut se subdiviser en quatre sous matrices (zones) de 25 entités. La valeur 25 est la première pouvant se subdiviser en quatre autres ( $9 + 6 + 6 + 4$ ) générant un triple ratio de valeur 3/2. Comme illustré figure 25, la valeur 9 ( $3 \times 3$ ) s'oppose en ratio 3/2 à la valeur 6 ( $3 \times 2$ ) puis la valeur 6 ( $2 \times 3$ ) s'oppose à la valeur 4 ( $2 \times 2$ ). Ces quatre valeurs s'opposent elles-mêmes deux à deux en le ratio 15/10, extension du ratio 3/2. Cette démonstration arithmétique est une variante géométrique de l'identité remarquable  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  où  $a$  et  $b$  ont ici les valeurs 3 et 2, valeurs s'opposant en le ratio 3/2.

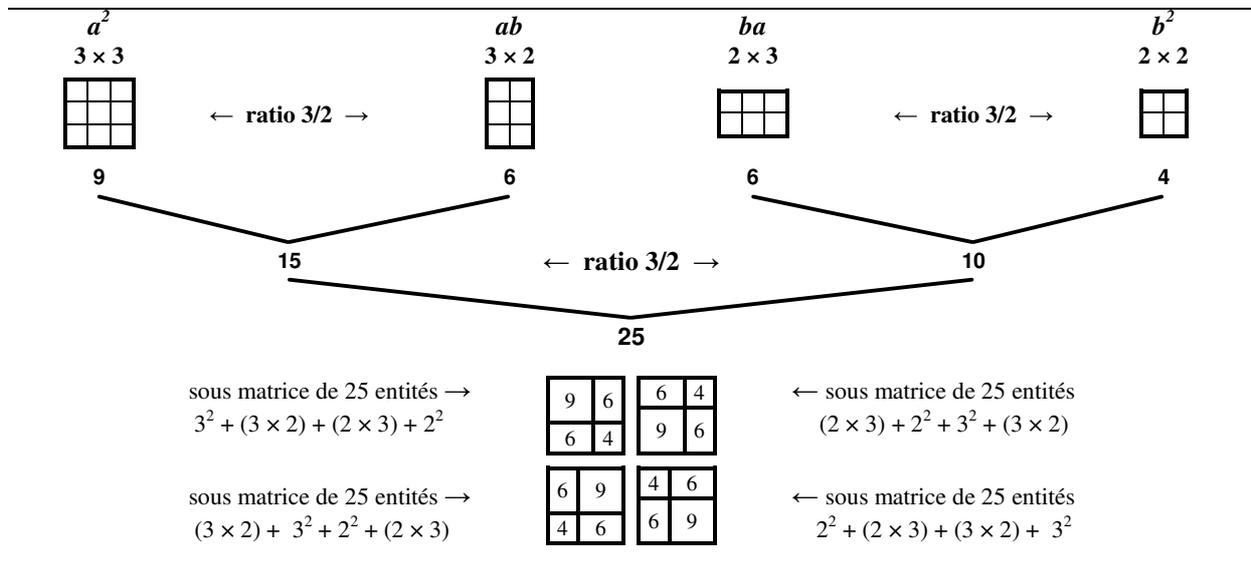


Fig. 25 Formation de quatre sous matrices de 25 entités s'inscrivant dans l'identité remarquable  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

Dans cette matrice de cent entités, il est alors possible d'agencer symétriquement et asymétriquement ces quatre sous matrices en 16 zones de quatre fois (9 + 6 + 6 + 4) cases (valeurs) comme décrit en partie basse de la figure 25.

Aussi, depuis ces 16 zones (figure 25), dans cette matrice de cent entités, peut-on redéfinir quatre autres zones, schématiquement illustrées figure 26, dont une première de quatre fois neuf (36) entités, une seconde de quatre fois six (24) entités, une troisième d'à nouveau quatre fois six (24) entités puis une quatrième et dernière zone de quatre fois quatre (16) entités.

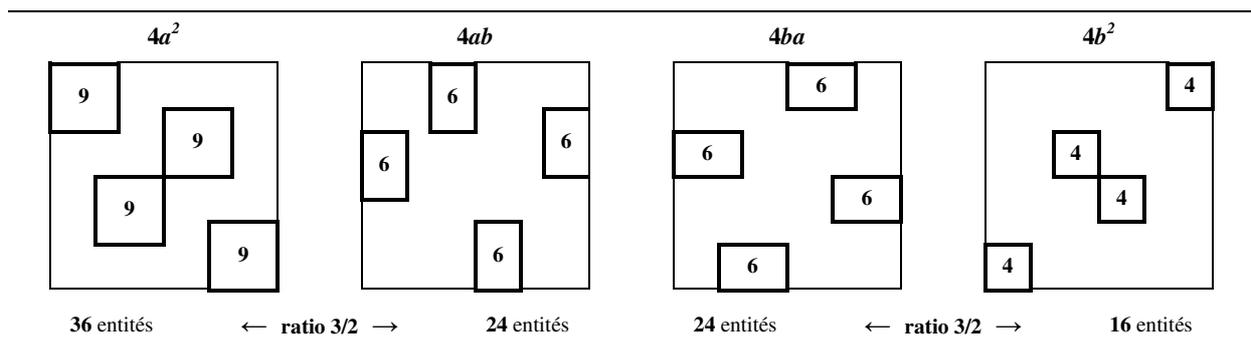


Fig. 26 Recombinaison de quatre sous matrices de 36→24→24→16 entités déduite de l'identité remarquable  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

Dans la matrice des dix suites de Fibonacci introduite figure 24, il est remarquable de constater que les 50 nombres ultimes et les 50 non ultimes sont toujours répartis en quantités égales dans chacune de ces quatre dernières zones définies. Ces quatre zones sont toutes, et interactivement, dans un arrangement géométrique simultanément symétrique et asymétrique tel qu'introduit figure 25 et développé figure 27.

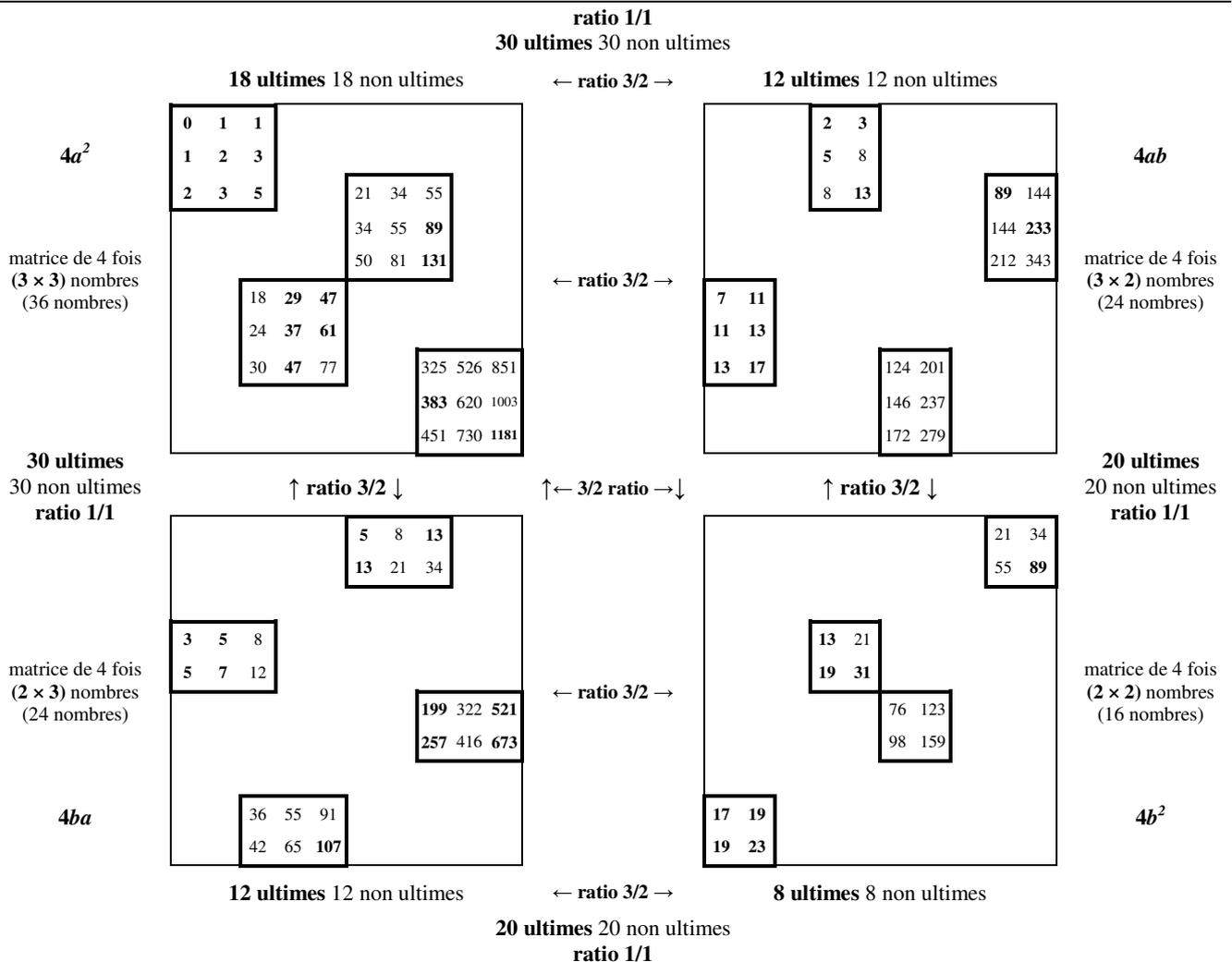


Fig. 27 Quatre sous matrices des dix suites de Fibonacci avec égale distribution des nombres ultimes et non ultimes et ratios 3/2 transcendants. Sous matrices s'organisant depuis l'identité remarquable  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  où a et b ont pour valeur 3 et 2 (voir figures 24, 25 et 26).

Aussi, de part leur particularités arithmétiques et géométriques, ces quatre zones s'agencent deux à deux, dans différentes configurations telles que celles présentées figure 28 pour générer des ensembles de nombres s'opposant toujours en le ratio 1/1 selon leur ultimité ou non ultimité et en ratio 3/2 selon leur distribution géographique.

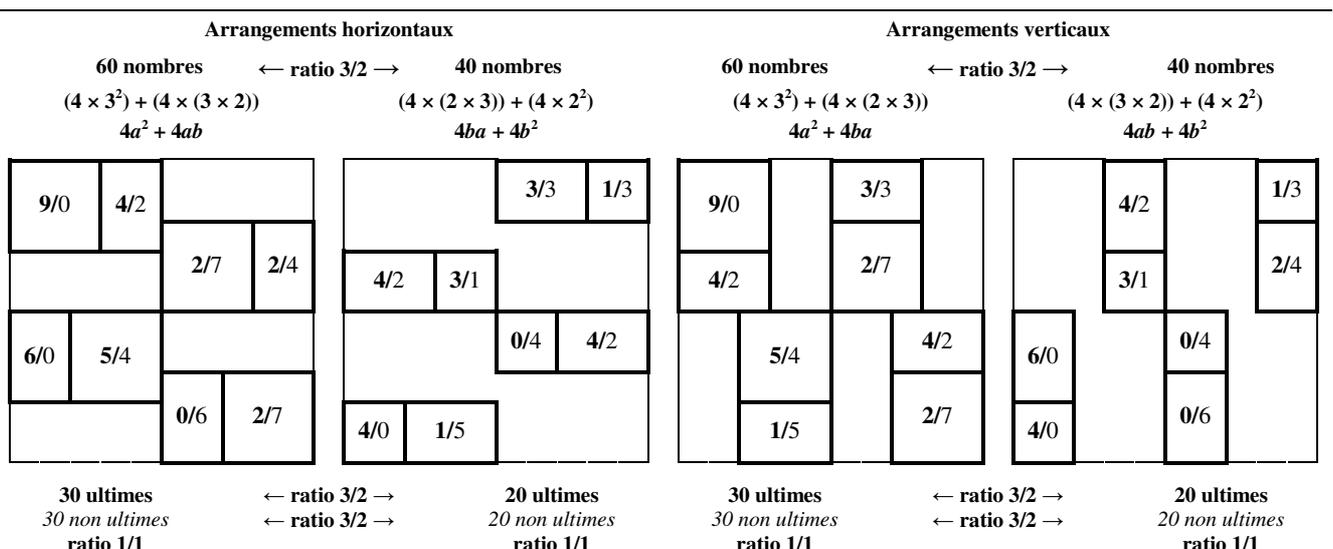


Fig. 28 Depuis la matrice des dix suites de Fibonacci, exemple d'agencements générant des ratios 1/1 et 3/2 entre les groupes de nombres ultimes et non ultimes (Selon les valeurs figure 27).

### 7.1.2 Autre agencement de quatre zones

Depuis la matrice des dix suites de Fibonacci, un réagencement légèrement différent des quatre sous matrices de 25 entités génère de semblable phénomènes arithmétiques. Dans ce nouvel agencement présenté figure 29, les deux sous matrices supérieures et les deux inférieures sont jumelles, donc identiques. Ces deux doubles sous matrices s'inscrivent toujours dans l'identité remarquable  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  où  $a$  et  $b$  ont les valeurs 3 et 2.

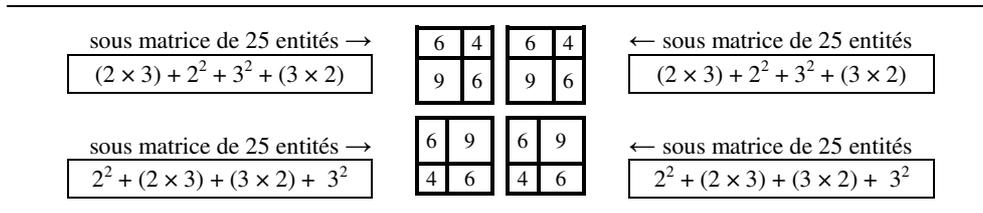


Fig. 29 Autre agencement de deux doubles sous matrices de 25 entités s'inscrivant dans l'identité remarquable  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  où  $a$  et  $b$  ont les valeurs 3 et 2.

Depuis ces nouvelles sous matrices de 25 entités, le regroupement, figure 29, des zones d'égaux configurations (zones de 9→6→6→4 entités) génère des ensembles où les nombres ultimes et les nombres non ultimes se retrouvent répartis encore en égales quantités. Ainsi ces ensembles s'opposent aussi en ratios 3/2 selon l'ultimité et la non ultimité de leurs composants.

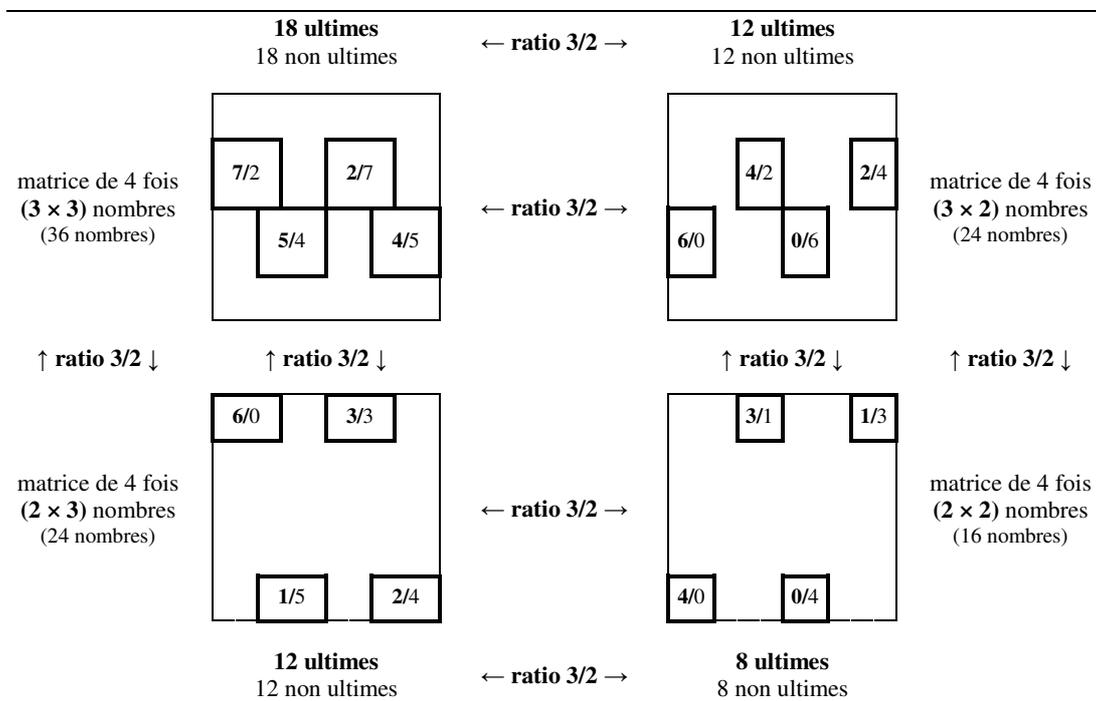


Fig. 30 Quatre sous matrices des dix suites de Fibonacci avec égale distribution des nombres ultimes et non ultimes et ratios 3/2 transcendants. Voir fig. 24 et 29.

L'opposition, présentée en introduction de chapitre figure 24, des valeurs respectives des ultimes et non ultimes des six lignes centrales et de quatre lignes périphériques de la matrice des dix suites de Fibonacci est la conséquence directe de ces autres configurations décrites figure 30 (par opposition des configurations centrales et périphériques).

### 7.1.3 Redéploiement de la matrice de Fibonacci

Un redéploiement de la matrice des dix suites de Fibonacci (introduite figure 24) en quatre rangées de vingt cinq entités génère encore un phénomène singulier de même nature et toujours lié à l'identité remarquable  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  où  $a$  et  $b$  ont les valeurs 3 et 2. Ici chaque ligne de 25 entités est scindée en sept zones symétriques où cette identité remarquable est ainsi redéployée :

$$\rightarrow (ab)^2 = b^2/2 + ba/2 + ab/2 + a^2 + ab/2 + ba/2 + b^2/2$$

Ainsi, les quantités d'entités respectives de ces sept zones sont les suivantes :

$$\rightarrow (3 \times 2)^2 = 2 + 3 + 3 + 9 + 3 + 3 + 2$$

Cet arrangement particulier et donc le redéploiement de cette identité remarquable sera aussi opéré dans les figures 43 et 49 avec d'autres valeurs considérées.

Matrice de 4 fois $(3^2 + (3 \times 2)) = 60$ nombres ( $\rightarrow$ 4 fois $(a^2 + ab)$ )																								
<b>30 ultimes</b>						$\leftarrow$ <b>ratio 1/1</b> $\rightarrow$						30 non ultimes												
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	2	3	5	8	13
21	34	55	89	144	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	5	7	12	19	31	50	81	131	212	343
7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	11	13	24	37	61	98	159	257	416	673	13	17	30	47	77
124	201	325	526	851	17	19	36	55	91	146	237	383	620	1003	19	23	42	65	107	172	279	451	730	1181
<b>20 ultimes</b>						$\leftarrow$ <b>ratio 1/1</b> $\rightarrow$						20 non ultimes												
Matrice de 4 fois $(2^2 + (2 \times 3)) = 40$ nombres ( $\rightarrow$ 4 fois $(b^2 + ba)$ )																								

Fig. 31 Redéploiement de la matrice de Fibonacci s'inscrivant dans l'identité remarquable  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  où  $a$  et  $b$  ont les valeurs 3 et 2. Egale distribution des **ultimes** et des non ultimes dans deux sous matrices intriquées de 60 contre 40 entités.

En regroupant symétriquement et depuis leur centre ces quatre rangées de nombres, tel que, depuis ce centre vers la bordure de cette nouvelle matrice, l'on isole quatre fois 9 + 6 valeurs puis quatre fois 6 + 4 entités comme illustré figure 30, se forment deux sous matrices de 60 contre 40 nombres. Dans ces deux sous matrices de ratio 3/2, les 50 ultimes et les 50 non ultimes se répartissent aussi en égales quantités et ainsi, chacune de ces deux catégories de nombres s'opposent en ratios 3/2 dans l'une et l'autre sous matrice.

### 7.2 Matrice de cinq suites de Fibonacci

La création de cinq suite de Fibonacci de dix nombres et dont les deux nombres initiaux sont les deux premiers chiffres nombres puis, successivement dans chaque suite, les deux suivants, génère une matrice de 50 entités dont très exactement 25 sont des nombres ultimes et 25 des non ultimes. Aussi, comme l'illustre la figure 32, ces deux catégories de nombres s'opposent en divers ratios 3/2 transcendants selon leur distribution géographique dans cette matrice.

<b>Matrice de 25 + 25 = 50 nombres</b>													
<b>25 ultimes</b>					$\leftarrow$ <b>ratio 1/1</b> $\rightarrow$				25 non ultimes				
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987
4	5	9	14	23	37	60	97	157	254	411	668	1079	1747
6	7	13	20	33	53	86	139	225	364	589	953	1542	2495
8	9	17	26	43	69	112	181	293	474	767	1241	2008	3249
<b>15 ultimes</b>					$\leftarrow$ <b>ratio 3/2</b> $\rightarrow$				<b>10 ultimes</b>				
10 non ultimes					$\leftarrow$ <b>ratio 2/3</b> $\rightarrow$				15 non ultimes				
<b>ratio 3/2</b>									<b>ratio 2/3</b>				

Fig. 32 Répartition des ultimes et des non ultimes dans la matrice de 5 suites de Fibonacci.

Ainsi, dans les cinq premières colonnes de cette matrice, dans un ratio de 3/2, 15 ultimes s'opposent à 10 non ultimes et dans un ratio inverse, 10 ultimes s'opposent à 15 non ultimes dans les cinq dernières colonnes. Ces valeurs réciproques s'opposent elles-mêmes en ratios 3/2 et 2/3 croisés selon les zones géographiques considérées de cette matrice de cinq suite de Fibonacci initialisée depuis les dix chiffres nombres.

Aussi, dans des sous matrices de trente contre vingt entités telles que présentées figure 33, les ultimes et non ultimes se répartissent en égale quantité (ratio 1/1) et s'opposent aux composants de la matrice complémentaire en exacts ratios de 3/2.

<b>Matrice de 2 fois 15 nombres (30 nombres)</b>										$\leftarrow$ <b>ratio 3/2</b> $\rightarrow$				<b>Matrice de 2 fois 10 nombres (20 nombres)</b>																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1547	2431	3770	5701	8541	12776	19184	28657	42951	64688	96413	143487	215470	323161	484131	720771	1074142	1605913	2380155	3531916	5257069	7814185	11546104	17187293	25628588	38045881	56133074	83188963	122811957	181950940	270012937	400064877	591077814	871140751	1281218688	1882388439	2763558296	4064728135	5965908072	8767087909	12868267346	18879466713	27690666070	40701865387	59713064754	87724864121	128736863488	188848857155	277060854822	407362850709	597494848376	877612851283	128793066164	188905059831	277117057497	407419053372	597551054029	877679056938	128849268840	188961262506	277173260166	407475256031	597607259685	877735262594	128905471515	189017465115	277229462835	407531458690	597663465341	877791468250	128961674190	189073667724	277285665504	407587661349	597719671000	877847673906	129017876865	189129870333	277341868173	407643864008	597775876656	877903879562	129074079540	189186072942	277398070842	407700066667	597832082312	877960085218	129130282215	189242275551	277454273511	407756269326	597888287968	878016290874	129186484890	189298478160	277510476180	407812471985	597944493624	878072496530	129242687565	189354680769	277566678849	407868674644	598000699280	878128702186	129298890240	189410883378	277622881518	407924877303	598056904936	878184907842	129355092915	189467085987	277679084187	407981079962	598113110592	878241113498	129411295590	189523288596	277735286856	408037282621	598169316248	878297319154	129467498265	189579491205	277791489525	408093485280	598225521904	878353524810	129523700940	189635693814	277847692194	408149687939	598281727560	878409730466	129579903615	189691896423	277903894863	408205890598	598337933216	878465936122	129636106290	189748099032	277960097532	408262093257	598394138872	878522141778	129692308965	189804301641	278016300201	408318295916	598450344528	878578347434	129748511640	189860504250	278072502870	408374498575	598506550184	878634553090	129804714315	189916706859	278128705539	408430701234	598562755840	878690758746	129860916990	190000000000	278184908208	408486903893	598618961496	878746964402	129917119665	190000000000	278241110877	408543106552	598675167152	878803170058	129973322340	190000000000	278297313546	408599309211	598731372808	878859375714	130029525015	190000000000	278353516215	408655511870	598787578464	878915581370	130085727690	190000000000	278409718884	408711714529	598843784120	878971787026	130141930365	190000000000	278465921553	408767917188	598900000000	879027992682	130198133040	190000000000	278522124222	408824119847	598956205656	879084198338	130254335715	190000000000	278578326891	408880322506	599012411312	879140404000	130310538390	190000000000	278634529560	408936525165	599068616968	879196609656	130366741065	190000000000	278690732229	408992727824	599124822624	879252815312	130422943740	190000000000	278746934898	409048930483	599181028280	879309020968	130479146415	190000000000	278803137567	409105133142	599237233936	879365226624	130535349090	190000000000	278859340236	409161335801	599293439592	879421432280	130591551765	190000000000	278915542905	409217538460	599349645248	879477637936	130647754440	190000000000	278971745574	409273741119	599405850904	879533843592	130703957115	190000000000	279027948243	409329943778	599462056560	879590049248	130760159790	190000000000	279084150912	409386146437	599518262216	879646254904	130816362465	190000000000	279140353581	409442349096	599574467872	879702460560	130872565140	190000000000	279196556250	409498551755	599630673528	879758666216	130928767815	190000000000	279252758919	409554754414	599686879184	879814871872	130984970490	190000000000	279308961588	409610957073	599743084840	879871077528	131041173165	190000000000	279365164257	409667159732	599799290496	879927283184	131097375840	190000000000	279421366926	409723362391	599855496152	880000000000	131153578515	190000000000	279477569595	409779565050	599911701808	880000000000	131209781190	190000000000	279533772264	409835767709	599967907464	880000000000	131265983865	190000000000	279590000000	409891970368	599999999999	880000000000	131322186540	190000000000	279646202669	409948173027	600000000000	880000000000	131378389215	190000000000	279702405338	410004375686	600000000000	880000000000	131434591890	190000000000	279758608007	410060578345	600000000000	880000000000	131490794565	190000000000	279814810676	410116781004	600000000000	880000000000	131547000000	190000000000	279871013345	410172983663	600000000000	880000000000	131603200000	190000000000	279927216014	410229186322	600000000000	880000000000	131659400000	190000000000	280000000000	410285388981	600000000000	880000000000	13171560



## 8 Les quatre classes de nombres entiers naturels

La ségrégation des nombres entiers naturels en deux ensembles d'entités qualifiés d'ultimes et de non ultimes n'est qu'une première étape dans l'investigation de ce type de nombres. Ici est faite une plus ample exploration de cet ensemble de nombres dévoilant sont organisation en quatre sous ensembles d'entités aux propriétés propres mais interactives et aussi le double concept de *diviseur ultime* et d'*algèbre ultime*.

### 8.1 Quatre différents types de nombres

Depuis la définition des nombres ultimes introduite plus haut, il est possible de différencier l'ensemble des nombres entiers naturels en quatre classes finales, progressivement définies selon ces critères :

Les nombres entiers naturels se subdivisent en ces deux catégories :

- **les ultimes** : Un nombre ultime n'admet aucun diviseur non trivial (nombre entier naturel) lui étant inférieur.
- **les non ultimes** : Un nombre non ultime admet au moins un diviseur non trivial (nombre entier naturel) lui étant inférieur.

Les nombres non ultimes se subdivisent en ces deux catégories :

- **les élevés** : Un nombre élevé est un nombre non ultime, puissance d'un nombre ultime.
- **les composés** : Un nombre composé est un nombre non ultime et non élevé admettant au moins deux différents diviseurs.

Les nombres composés se subdivisent en ces deux catégories :

- **les composés purs** : un nombre composé pur est un nombre non ultime et non élevé n'admettant aucun nombre élevé pour diviseur.
- **les composés mixtes** : un nombre composé mixte est un nombre non ultime et non élevé admettant au moins un nombre élevé pour diviseur.

Le tableau figure 37 synthétise ces différentes définitions. Il est plus amplement développé figure 38 où les interactions des quatre classes d'entiers naturels sont mises en évidences.

les entiers naturels :			
<b>les ultimes :</b>  un nombre ultime n'admet aucun diviseur non trivial (nombre entier naturel) lui étant inférieur	<b>les non ultimes :</b> un nombre non ultime admet au moins un diviseur non trivial (nombre entier naturel) lui étant inférieur		
	<b>les élevés :</b>  un nombre élevé est un nombre non ultime, puissance d'un nombre ultime	<b>les composés :</b> un nombre composé est un nombre non ultime et non élevé admettant au moins deux différents diviseurs	
		<b>les composés purs :</b> un nombre composé pur est un nombre non ultime et non élevé n'admettant aucun nombre élevé pour diviseur	<b>les composés mixtes :</b> un nombre composé mixte est un nombre non ultime et non élevé admettant au moins un nombre élevé pour diviseur
<b>niveau 1</b>	<b>niveau 2</b>	<b>niveau 3</b>	<b>niveau 4</b>
degré de complexité des quatre classes finales de nombres			

Fig.37 Classification des nombres entiers naturels depuis la définition des nombres ultimes.

### 8.2 Diviseur ultime

La distinction des nombres entiers naturels en différentes classes déduites depuis la définition des nombres ultimes permet de proposer le double concept de *diviseur ultime* et d'*algèbre ultime*.

#### 8.2.1 Diviseur ultime : définition

Un diviseur ultime d'un nombre entier naturel est un nombre ultime **inférieur à cet entier naturel** et diviseur non trivial de ce nombre entier naturel.

Par exemple le nombre 12 possède six diviseurs, les nombres 1, 2, 3, 4, 6 et 12 mais seulement deux diviseurs ultimes : 2 et 3. Aussi, les nombres zéro (0) et un (1), bien que nombres définis comme ultimes, ne sont jamais des diviseurs ultimes. Pour rappel, la division par zéro (0) n'est pas définie et donc ce nombre n'est pas diviseur ultime. Le nombre un (1) est diviseur trivial, il ne divise pas un nombre en partie plus petite.

### 8.2.2 Concept d'algèbre ultime

L'algèbre ultime ne s'applique qu'à l'ensemble des entiers naturels et s'organise, d'une part, autour de la définition de diviseur ultime (précédemment introduite), d'autre part autour de la définition de nombre ultime (précédemment introduite). Cette algèbre stipule que tout nombre entier naturel est soit un nombre ultime n'ayant aucun diviseur ultime, soit un nombre non ultime (pouvant être soit un élevé, soit un composé pur, soit un composé mixte) se décomposant en plusieurs diviseurs ultimes. Dans cette algèbre, aucun nombre entier naturel  $x$  ne peut s'écrire sous la forme  $x = x \times 1$  mais seulement sous la forme  $x = x$  (ultime) ou sous la forme  $x = y \times y \times \dots$  (élevé) ou  $x = y \times z \times \dots$  (composé) ou encore  $x = (y \times y \times \dots) \times z \times \dots$  (mixte). Aussi dans cette algèbre, il n'est pas permis d'écrire par exemple  $0 = 0 \times y \times z \times \dots$  mais seulement  $0 = 0$ .

#### 8.2.2.1 Spécificités des nombres zéro et un

De par ces postulats proposant un concept d'algèbre ultime, il est convenu et rappelé que bien que définis comme nombres ultimes, les nombres zéro (0) et un (1) ne sont ni diviseurs ultimes, ni composés de diviseurs ultimes.

### 8.2.3 Diviseurs ultimes et classes de nombres

Le tableau figure 38 synthétise les quatre définitions interactives des quatre classes d'entiers naturels en y intégrant le double concept de diviseur ultime et d'algèbre ultime. Il est aussi suggéré ici de nommer  $u$  un nombre ultime,  $e$  un élevé,  $c$  un composé pur et  $m$  un nombre composé mixte.

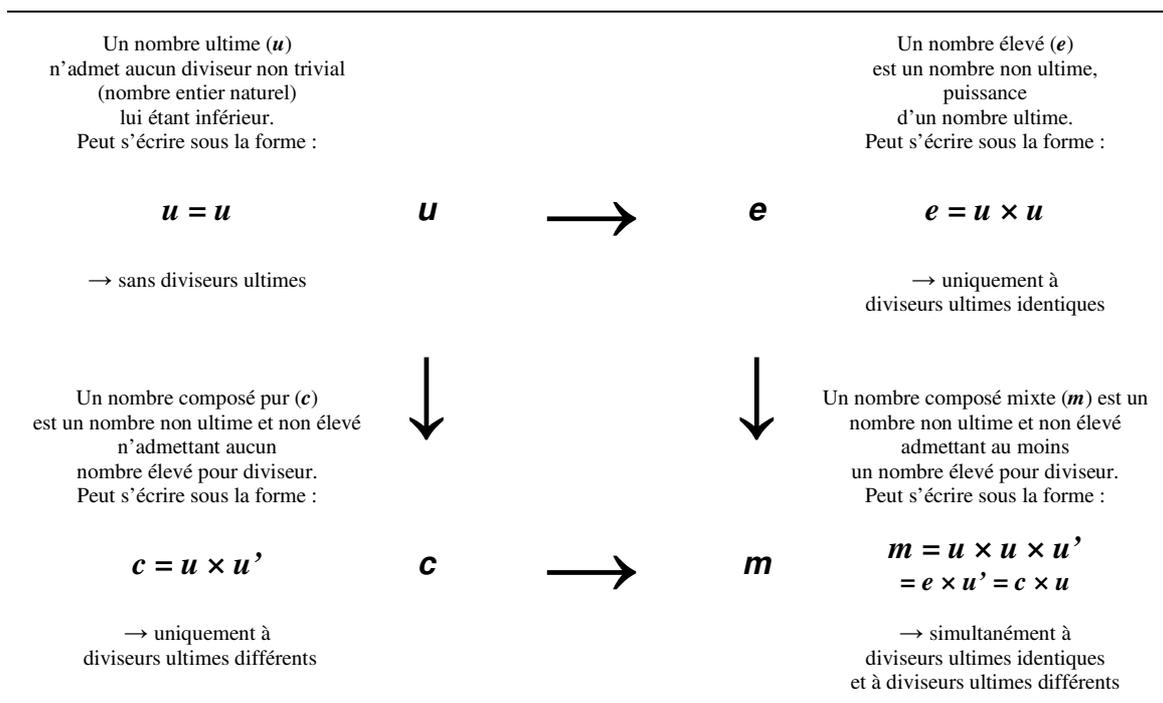


Fig.38 Classification et interactions des quatre classes de nombres entiers naturels.

### 8.3 Les quatre classes d'entiers naturels

Ainsi, vient d'être proposé ici la classification de l'ensemble de nombres entiers naturels en quatre classes de nombres :

- les nombres ultimes dénommés **ultimes** ( $u$ ),
- les nombres élevés dénommés **élevés** ( $e$ ),
- les nombres composés purs dénommés **composés** ( $c$ ),
- les nombres composés mixtes dénommés **mixtes** ( $m$ ).

Ainsi, est-il convenu que l'appellation "ultimes" désigne les nombres ultimes (comme "premiers" désigne les nombres premiers). De même, est-il convenu que l'appellation "élevés" désigne les nombres élevés, l'appellation "composés" désigne les nombres composés purs et l'appellation "mixtes" désigne les nombres composés mixtes.

Ci-dessous, figure 39, une illustration pratique des concepts de nombres ultimes, de diviseurs ultimes et d'algèbre ultime est développée avec pour exemple les nombres ultimes 2 et 3 ( $u$  et  $u'$ ), diviseurs ultimes des non ultimes 4, 6 et 12 ( $e$ ,  $c$  et  $m$ ).

$u = u$	$u$	$\rightarrow$	$e$	$e = u \times u$
$u = 2$	<b>2</b>		<b>4</b>	$e = 2 \times 2$
	$\downarrow$		$\downarrow$	
$c = u \times u'$	$c$	$\rightarrow$	$m$	$m = u \times u \times u' = e \times u' = c \times u$
$c = 2 \times 3$	<b>6</b>		<b>12</b>	$m = 2 \times 2 \times 3 = 4 \times 3 = 6 \times 2$

Fig. 39 Illustration des concepts de nombres ultimes, de diviseurs ultimes et d'algèbre ultime (voir aussi fig. 38).

### 9. Les quarante nombres primordiaux

La classification des nombres entiers naturels précédemment introduite permet de définir (figure 40) un ensemble de quarante nombres primordiaux. Ces quarante nombres primordiaux sont l'ensemble des dix premiers nombres de chacune des quatre classes de nombres entiers naturels. Il est convenu que l'appellation " primordiaux " désigne ces quarante nombres primordiaux.

les dix premiers <b>ultimes</b>	les dix premiers <b>élevés</b>	les dix premiers <b>composés purs</b>	les dix premiers <b>composés mixtes</b>
0 1 2 3 5 7 11 13 17 19	4 8 9 16 25 27 32 49 64 81	6 10 14 15 21 22 26 30 33 34	12 18 20 24 28 36 40 44 45 48
		20 composés	
		30 non ultimes	
40 primordiaux			

Fig. 40 Les dix premiers nombres de chacune des quatre classes de nombres : les quarante primordiaux.

#### 9.1 Matrice des cent premiers nombres et nombres primordiaux

Dans la matrice des 100 premiers nombres entiers naturels s'opposent donc, dans un ratio de 3/2, 60 nombres non primordiaux aux 40 primordiaux précédemment définis figure 40. La différenciation de position des 40 primordiaux génère de singuliers phénomènes de ratio 3/2 selon les différentes zones considérées de 60 contre 40 entités ou de 50 contre 50 entités.

Ainsi, dans cette matrice, il s'avère figure 41 que la distinction de deux sous matrices de deux fois 3 colonnes contre deux fois 2 colonnes génère des ensembles de nombres primordiaux et de nombres non primordiaux qui s'opposent en ratios 3/2 transcendants de 36 contre 24 entités et de 24 contre 16 entités.

sous matrice de 2 fois 3 colonnes (60 nombres)	$\leftarrow$ ratio 3/2 $\rightarrow$	sous matrice de 2 fois 2 colonnes (40 nombres)	36 nombres non primordiaux 24 nombres primordiaux ratio 3/2									
			0 1 2 3 4 5 6 7 8 9									
			10 11 12 13 14 15 16 17 18 19									
			20 21 22 23 24 25 26 27 28 29									
			30 31 32 33 34 35 36 37 38 39									
			40 41 42 43 44 45 46 47 48 49									
			50 51 52 53 54 55 56 57 58 59									
			60 61 62 63 64 65 66 67 68 69									
			70 71 72 73 74 75 76 77 78 79									
			80 81 82 83 84 85 86 87 88 89									
			90 91 92 93 94 95 96 97 98 99									
36 non primordiaux 24 primordiaux ratio 3/2	$\leftarrow$ ratio 3/2 $\rightarrow$ $\leftarrow$ ratio 3/2 $\rightarrow$	24 non primordiaux 16 primordiaux ratio 3/2	24 nombres non primordiaux 16 nombres primordiaux ratio 3/2									

Fig. 41 Distinction et répartition des 40 nombres primordiaux et 60 non primordiaux dans la matrice des cent premiers nombres.

Dans les sous matrices d'égales grandeurs et alternativement constituées des quarts supérieurs et inférieurs de la matrice complète des cent premiers nombres telles qu'illustrées figure 42, les 60 nombres non primordiaux se répartissent en valeurs de quantités égales et ces ensembles de deux fois 30 non primordiaux s'opposent en ratios de valeur 3/2 au 40 primordiaux aussi distribués en deux ensembles égaux de 20 entités.

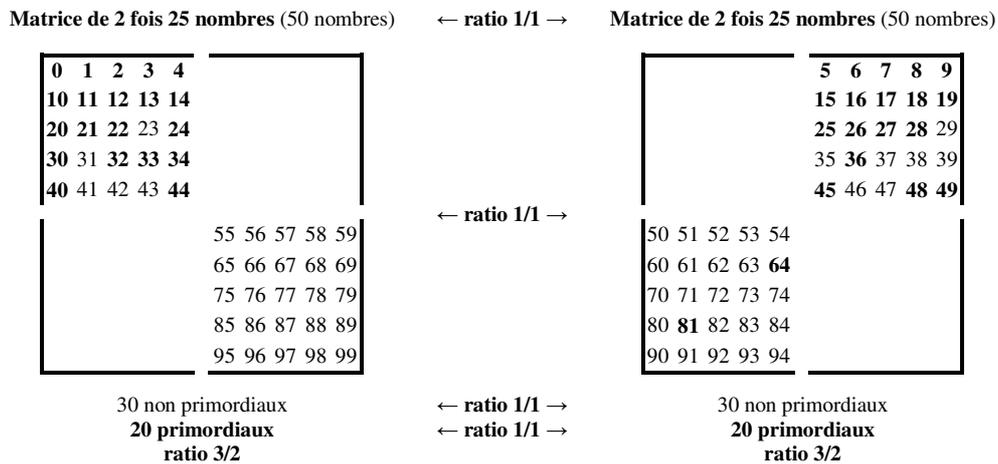


Fig. 42 Egale répartition des 60 non primordiaux et 40 primordiaux dans deux sous matrices des cent premiers nombres.

Un redéploiement de la matrice des cent premiers nombres introduite figure 40 en quatre rangées de 25 entités génère encore un phénomène remarquable dans la distinction des 40 primordiaux et des 60 non primordiaux. Cette matrice, de même type que celle présentée chapitre 7 figure 31, est aussi liée à l'identité remarquable  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  où  $a$  et  $b$  ont les valeurs 3 et 2.

En regroupant symétriquement et depuis leur centre ces quatre rangées de nombres, tel que, depuis ce centre vers la bordure de cette nouvelle matrice, l'on isole quatre fois 9 + 6 valeurs puis quatre fois 6 + 4 entités comme illustré figure 43, se forment deux sous matrices de 60 contre 40 nombres. Dans ces deux sous matrices de ratio 3/2, les non primordiaux et les primordiaux se répartissent aussi en ensembles de nombres qui s'opposent en ratios 3/2 transcendants de 36 contre 24 entités et de 24 contre 16 entités.

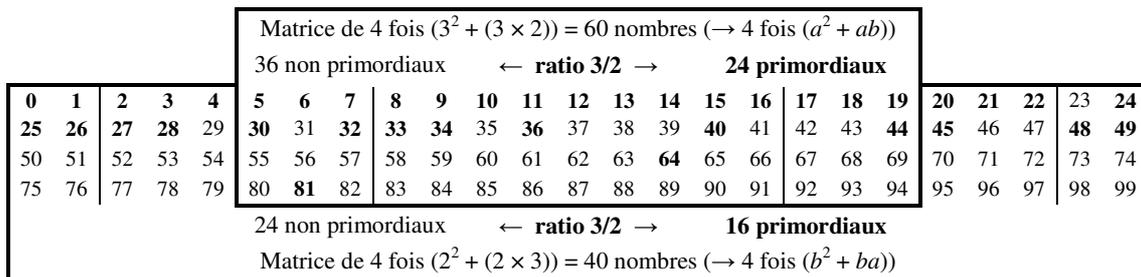


Fig. 43 Redéploiement de la matrice des 100 premiers nombres s'inscrivant dans l'identité remarquable  $(a + b...)$ . Distribution des 60 non primordiaux et des 40 primordiaux en ensembles s'opposant en ratios 3/2 transcendants dans deux sous matrices intriquées de 60 contre 40 entités.

## 9.2 Sous matrices linéaires de soixante et quarante nombres

Dans la sous matrice de 60 entités constituée alternativement des six premiers nombres puis des six derniers nombres de chacune des dix lignes de la matrice des cent premiers nombres introduite figure 40, les nombres non primordiaux et primordiaux s'opposent, partie gauche de la figure 44, en deux ensembles de ratio de valeur 3/2 et ces ensembles s'opposent eux-mêmes aux deux ensembles réciproques de la sous matrice complémentaire de 40 entités en ratios transcendants de valeur 3/2.

Aussi, se produisent exactement les mêmes phénomènes dans et entre les deux sous matrices, de 60 contre 40 entités où l'alternance des nombres considérés s'applique de deux à deux lignes telle qu'illustrée en partie droite de la figure 44.

Sous matrice de 10 fois 6 nombres (60 nombres)	← ratio 3/2 →	Sous matrice de 10 fois 4 nombres (40 nombres)	Sous matrice de 5 fois 12 nombres (60 nombres)	← ratio 3/2 →	Sous matrice de 5 fois 8 nombres (40 nombres)																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
<table border="1"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>16</td><td>17</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>18</td><td>19</td></tr> <tr><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>34</td><td>35</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>36</td><td>37</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>38</td><td>39</td></tr> <tr><td>40</td><td>41</td><td>42</td><td>43</td><td>44</td><td>45</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>54</td><td>55</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>56</td><td>57</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>58</td><td>59</td></tr> <tr><td>60</td><td>61</td><td>62</td><td>63</td><td>64</td><td>65</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>74</td><td>75</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>76</td><td>77</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>78</td><td>79</td></tr> <tr><td>80</td><td>81</td><td>82</td><td>83</td><td>84</td><td>85</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>94</td><td>95</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>96</td><td>97</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>98</td><td>99</td></tr> </table>	0	1	2	3	4	5					14	15					16	17					18	19	20	21	22	23	24	25					34	35					36	37					38	39	40	41	42	43	44	45					54	55					56	57					58	59	60	61	62	63	64	65					74	75					76	77					78	79	80	81	82	83	84	85					94	95					96	97					98	99		<table border="1"> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td></tr> <tr><td>30</td><td>31</td><td>32</td><td>33</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>46</td><td>47</td><td>48</td><td>49</td></tr> <tr><td>50</td><td>51</td><td>52</td><td>53</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>66</td><td>67</td><td>68</td><td>69</td></tr> <tr><td>70</td><td>71</td><td>72</td><td>73</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>86</td><td>87</td><td>88</td><td>89</td></tr> <tr><td>90</td><td>91</td><td>92</td><td>93</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>					6	7	8	9	10	11	12	13									26	27	28	29	30	31	32	33									46	47	48	49	50	51	52	53									66	67	68	69	70	71	72	73									86	87	88	89	90	91	92	93						<table border="1"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>24</td><td>25</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>26</td><td>27</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>28</td><td>29</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>34</td><td>35</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>36</td><td>37</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>38</td><td>39</td></tr> <tr><td>40</td><td>41</td><td>42</td><td>43</td><td>44</td><td>45</td></tr> <tr><td>50</td><td>51</td><td>52</td><td>53</td><td>54</td><td>55</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>64</td><td>65</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>66</td><td>67</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>68</td><td>69</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>74</td><td>75</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>76</td><td>77</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>78</td><td>79</td></tr> <tr><td>80</td><td>81</td><td>82</td><td>83</td><td>84</td><td>85</td></tr> <tr><td>90</td><td>91</td><td>92</td><td>93</td><td>94</td><td>95</td></tr> </table>	0	1	2	3	4	5	10	11	12	13	14	15					24	25					26	27					28	29					34	35					36	37					38	39	40	41	42	43	44	45	50	51	52	53	54	55					64	65					66	67					68	69					74	75					76	77					78	79	80	81	82	83	84	85	90	91	92	93	94	95		<table border="1"> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td></tr> <tr><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>30</td><td>31</td><td>32</td><td>33</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>46</td><td>47</td><td>48</td><td>49</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>56</td><td>57</td><td>58</td><td>59</td></tr> <tr><td>60</td><td>61</td><td>62</td><td>63</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>70</td><td>71</td><td>72</td><td>73</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>86</td><td>87</td><td>88</td><td>89</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>96</td><td>97</td><td>98</td><td>99</td></tr> </table>					6	7	8	9					16	17	18	19	20	21	22	23					30	31	32	33									46	47	48	49					56	57	58	59	60	61	62	63					70	71	72	73									86	87	88	89					96	97	98	99
0	1	2	3	4	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				14	15																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				16	17																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				18	19																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
20	21	22	23	24	25																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				34	35																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				36	37																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				38	39																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
40	41	42	43	44	45																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				54	55																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				56	57																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				58	59																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
60	61	62	63	64	65																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				74	75																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				76	77																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				78	79																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
80	81	82	83	84	85																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				94	95																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				96	97																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				98	99																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				6	7	8	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
10	11	12	13																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
				26	27	28	29																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
30	31	32	33																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
				46	47	48	49																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
50	51	52	53																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
				66	67	68	69																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
70	71	72	73																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
				86	87	88	89																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
90	91	92	93																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
0	1	2	3	4	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
10	11	12	13	14	15																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				24	25																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				26	27																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				28	29																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				34	35																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				36	37																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				38	39																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
40	41	42	43	44	45																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
50	51	52	53	54	55																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				64	65																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				66	67																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				68	69																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				74	75																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				76	77																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				78	79																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
80	81	82	83	84	85																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
90	91	92	93	94	95																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
				6	7	8	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
				16	17	18	19																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
20	21	22	23																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
30	31	32	33																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
				46	47	48	49																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
				56	57	58	59																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
60	61	62	63																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
70	71	72	73																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
				86	87	88	89																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
				96	97	98	99																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
36 non primordiaux 24 primordiaux ratio 3/2	← ratio 3/2 →	24 non primordiaux 16 primordiaux ratio 3/2	36 non primordiaux 24 primordiaux ratio 3/2	← ratio 3/2 →	24 non primordiaux 16 primordiaux ratio 3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					

Fig. 44 Distribution des 60 non primordiaux et des 40 primordiaux en ensembles s'opposant en ratios 3/2 transcendants. Selon différentes sous matrices alternativement linéaires.

### 9.3 Matrices concentriques et excentriques

Dans cette matrice des cent premiers nombres, des arrangements plus sophistiqués et identiques aux configurations introduites chapitre 4 figure 13 opposent ici des ensembles de nombres non primordiaux et primordiaux en exacts ratios 3/2. Ainsi, comme décrit partie gauche de la figure 45, cinq zones concentriques s'opposent, trois contre deux, dans la répartition de leur nombres non primordiaux et primordiaux en ratios 3/2. Le même phénomène se reproduit en considérant les cinq zones excentriques présentées en partie droite de cette figure 45.

Configurations concentriques		Configurations excentriques																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
Matrice de 3 zones concentriques (60 nombres)	← ratio 3/2 →	Matrice de 2 zones concentriques (40 nombres)	Matrice de 3 zones excentriques (60 nombres)	← ratio 3/2 →	Matrice de 2 zones excentriques (40 nombres)																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
<table border="1"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>10</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>19</td></tr> <tr><td>20</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td></td><td></td><td>29</td></tr> <tr><td>30</td><td>32</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>37</td><td></td><td>39</td></tr> <tr><td>40</td><td>42</td><td>44</td><td>45</td><td></td><td></td><td></td><td>47</td><td></td><td>49</td></tr> <tr><td>50</td><td>52</td><td>54</td><td>55</td><td></td><td></td><td></td><td>57</td><td></td><td>59</td></tr> <tr><td>60</td><td>62</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>67</td><td></td><td>69</td></tr> <tr><td>70</td><td>72</td><td>73</td><td>74</td><td>75</td><td>76</td><td>77</td><td></td><td></td><td>79</td></tr> <tr><td>80</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>89</td></tr> <tr><td>90</td><td>91</td><td>92</td><td>93</td><td>94</td><td>95</td><td>96</td><td>97</td><td>98</td><td>99</td></tr> </table>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10									19	20	22	23	24	25	26	27			29	30	32						37		39	40	42	44	45				47		49	50	52	54	55				57		59	60	62						67		69	70	72	73	74	75	76	77			79	80									89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99		<table border="1"> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr> <tr><td>21</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>28</td></tr> <tr><td>31</td><td></td><td></td><td></td><td>33</td><td>34</td><td>35</td><td>36</td><td></td><td></td><td></td><td>38</td></tr> <tr><td>41</td><td></td><td></td><td></td><td>43</td><td></td><td></td><td></td><td>46</td><td></td><td></td><td>48</td></tr> <tr><td>51</td><td></td><td></td><td></td><td>53</td><td></td><td></td><td></td><td>56</td><td></td><td></td><td>58</td></tr> <tr><td>61</td><td></td><td></td><td></td><td>63</td><td>64</td><td>65</td><td>66</td><td></td><td></td><td></td><td>68</td></tr> <tr><td>71</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>78</td></tr> <tr><td>81</td><td>82</td><td>83</td><td>84</td><td>85</td><td>86</td><td>87</td><td>88</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>					11	12	13	14	15	16	17	18	21											28	31				33	34	35	36				38	41				43				46			48	51				53				56			58	61				63	64	65	66				68	71											78	81	82	83	84	85	86	87	88						<table border="1"> <tr><td>0</td><td></td><td>2</td><td></td><td>4</td><td>5</td><td></td><td>7</td><td></td><td>9</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>12</td><td></td><td>14</td><td>15</td><td></td><td>17</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td></td><td>24</td><td>25</td><td></td><td>27</td><td>28</td><td>29</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>34</td><td>35</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>40</td><td>41</td><td>42</td><td>43</td><td>44</td><td>45</td><td>46</td><td>47</td><td>48</td><td>49</td></tr> <tr><td>50</td><td>51</td><td>52</td><td>53</td><td>54</td><td>55</td><td>56</td><td>57</td><td>58</td><td>59</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>64</td><td>65</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>70</td><td>71</td><td>72</td><td></td><td>74</td><td>75</td><td></td><td>77</td><td>78</td><td>79</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>84</td><td>85</td><td></td><td>87</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>90</td><td></td><td>92</td><td></td><td>94</td><td>95</td><td></td><td>97</td><td></td><td>99</td></tr> </table>	0		2		4	5		7		9			12		14	15		17			20	21	22		24	25		27	28	29					34	35					40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59					64	65					70	71	72		74	75		77	78	79					84	85		87			90		92		94	95		97		99		<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td></td><td>3</td><td></td><td>6</td><td></td><td>8</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>10</td><td>11</td><td></td><td>13</td><td></td><td>16</td><td></td><td>18</td><td>19</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>23</td><td></td><td>26</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>30</td><td>31</td><td>32</td><td>33</td><td></td><td>36</td><td>37</td><td>38</td><td>39</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>60</td><td>61</td><td>62</td><td>63</td><td></td><td>66</td><td>67</td><td>68</td><td>69</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>76</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>80</td><td>81</td><td></td><td>83</td><td></td><td>86</td><td></td><td>88</td><td>89</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>96</td><td></td><td>98</td><td></td><td></td></tr> </table>		1		3		6		8			10	11		13		16		18	19					23		26					30	31	32	33		36	37	38	39												60	61	62	63		66	67	68	69							76					80	81		83		86		88	89							96		98		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
10									19																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
20	22	23	24	25	26	27			29																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
30	32						37		39																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
40	42	44	45				47		49																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
50	52	54	55				57		59																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
60	62						67		69																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
70	72	73	74	75	76	77			79																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
80									89																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
				11	12	13	14	15	16	17	18																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
21											28																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
31				33	34	35	36				38																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
41				43				46			48																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
51				53				56			58																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
61				63	64	65	66				68																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
71											78																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
81	82	83	84	85	86	87	88																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
0		2		4	5		7		9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
		12		14	15		17																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
20	21	22		24	25		27	28	29																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
				34	35																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
				64	65																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
70	71	72		74	75		77	78	79																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
				84	85		87																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
90		92		94	95		97		99																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
	1		3		6		8																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
10	11		13		16		18	19																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
			23		26																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
30	31	32	33		36	37	38	39																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
60	61	62	63		66	67	68	69																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
					76																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
80	81		83		86		88	89																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
					96		98																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
36 non primordiaux 24 primordiaux ratio 3/2	← ratio 3/2 →	24 non primordiaux 16 primordiaux ratio 3/2	36 non primordiaux 24 primordiaux ratio 3/2	← ratio 3/2 →	24 non primordiaux 16 primordiaux ratio 3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			

Fig. 45 Depuis la matrice des cent premiers nombres, configurations concentriques et excentriques de sous matrices de 60 et 40 entités opposant leurs non primordiaux et leurs primordiaux en ratios 3/2.

Aussi, dans des configurations identiques à celles introduites chapitre 4 figure 14, en mixant, ces sous matrices de 40 et 60 entités (présentées figure 45) et après les avoir chacune scindées verticalement en deux parties égales de 30 et 20 entités, obtient-on, figure 46, de nouvelles matrices de 50 entités chacune. Dans ces configurations mixtes, les non primordiaux et les primordiaux se répartissent en exact ratios de valeur 1/1 avec toujours 30 non primordiaux contre 30 et toujours 20 non primordiaux contre 20.

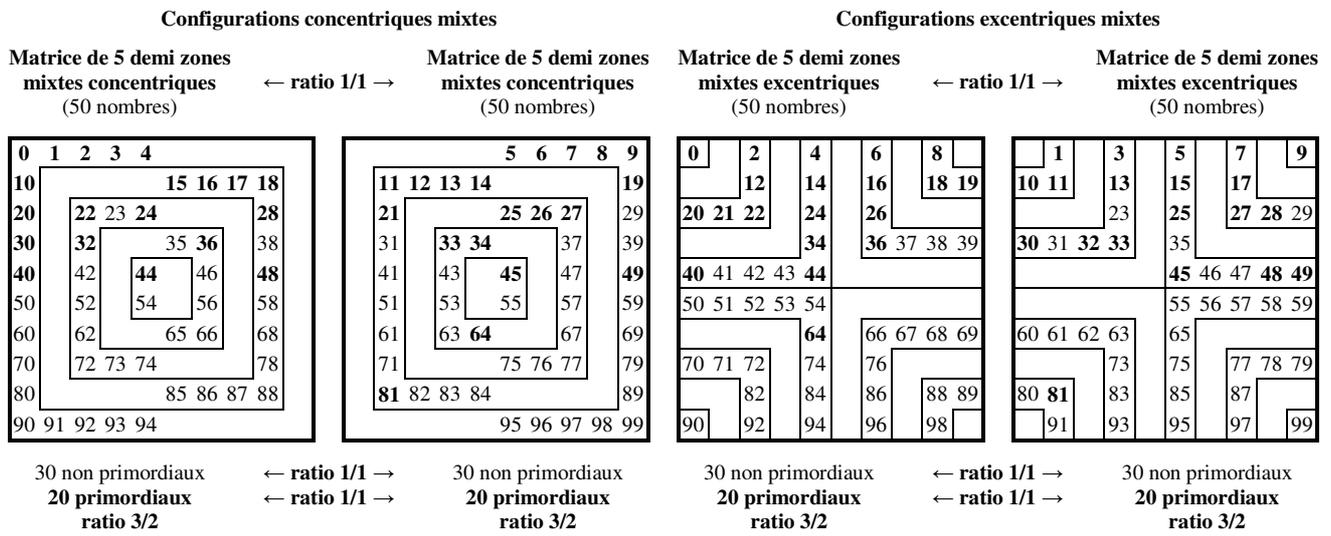


Fig. 46 Depuis la matrice des cent premiers nombres, configurations concentriques et excentriques mixtes de sous matrices de chacune 50 entités opposant leurs non primordiaux et leurs primordiaux en ratios 1/1.

Il est important de souligner ici la totale similarité de ces phénomènes arithmétiques avec ceux opérant dans les sous matrices introduites chapitre 4.2 où les données sources (tableau d'additions croisées des vingt fondamentaux) sont pourtant totalement différentes.

### 10. Diviseurs ultimes et matrice des cent premiers nombres.

Dans la matrice des cent premiers nombres entiers naturels, 27 sont des nombres ultimes et 73 des non ultimes. Les tableaux de la figure 47 démontre que ces 73 non ultimes sont des compositions de 15 différents diviseurs ultimes (nombres ultimes de 2 à 47) et situent leur première apparition au sein de cette matrice. Par exemple, le *diviseur ultime* 5 apparaît la première fois comme diviseur ultime du *non ultime* 10. En partie droite de la figure 47 est fait le décompte de la totalité des diviseurs ultimes composant individuellement ces 73 non ultimes.

Pour rappel (voir chapitre 8.2), les nombres ultimes ne sont pas composés de diviseurs ultimes et les nombres *zéro* (0) et *un* (1) ne sont ni diviseurs ultimes, ni composés de diviseurs ultimes.

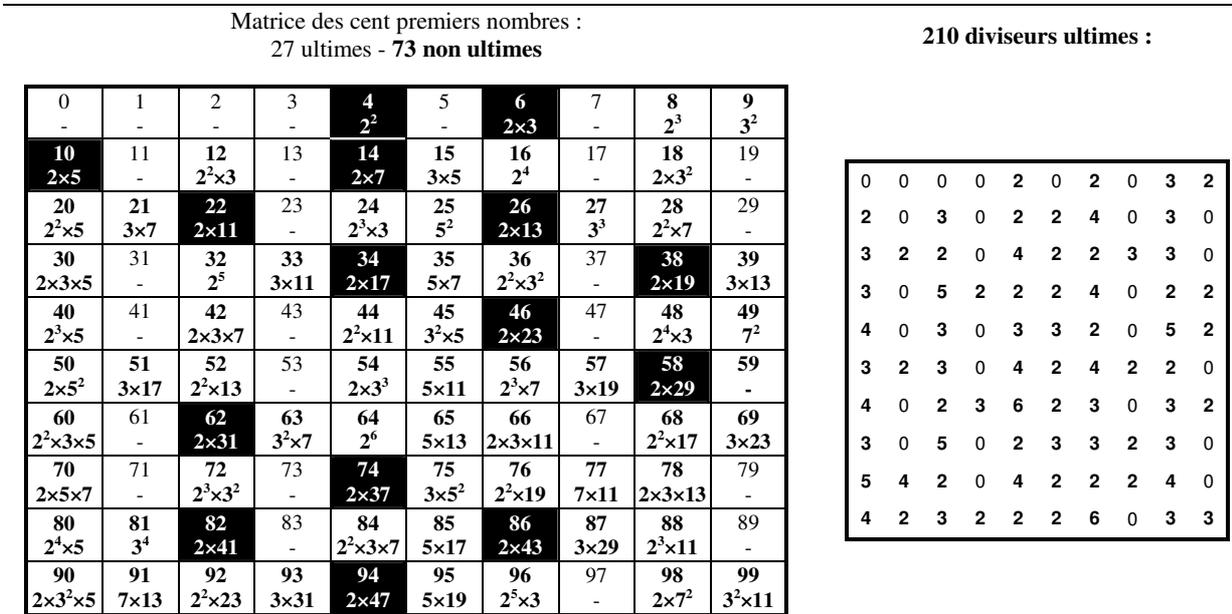


Fig. 47 Distribution des 15 diviseurs ultimes (de 2 à 47) dans la matrice des cent premiers nombres et distinction de leur première apparition. Décompte individuel de la quantité totale de diviseurs ultimes constituant les 73 non ultimes.

#### 10.1 Quinze diviseurs ultimes et matrice des cent premiers nombres

Ces quinze diviseurs ultimes se regroupent, figure 48, en trois ensembles dont la taille croît régulièrement selon qu'ils composent plus ou moins de catégories de nombres (classes). Parmi ces quinze diviseurs ultimes, 4 se trouvent être diviseurs des trois classes de nombres non ultimes (les élevés, les composés et les mixtes). Puis 5 ne sont diviseurs que de deux classes (les composés et les mixtes) et enfin 6 diviseurs ultimes ne le sont que d'une classe de nombre, celle des composés. Aussi,

dans un ratio de 3/2, 9 diviseurs ultimes (de 2 à 23) composant plus d'une classe de nombres s'opposent à 6 diviseurs (de 29 à 47) n'en composant qu'une seule.

Les 15 diviseurs ultimes des 100 premiers nombres :																				
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47						
4 diviseurs d'élevés, de composés, de mixtes				5 diviseurs de composés, de mixtes					6 diviseurs de composés											
9 diviseurs de 3 classes ou de 2 classes									← ratio 3/2 →						6 diviseurs de 1 classe					

Fig. 48 Distinction des 15 diviseurs ultimes ( de 2 à 47) selon les types de classes d'entiers naturels qu'ils composent.

Comme le démontre le tableau droit de la figure 47, l'ensemble des cent premiers nombres (dédit des 27 ultimes n'en étant pas composés) totalisent 210 diviseurs ultimes. Cette valeur permet l'apparition de ratios 3/2 et effectivement, dans plusieurs configurations symétriques opposant, dans un ratio de 3/2, des matrices de 60 et 40 nombres, ces diviseurs ultimes s'opposent aussi en un ratio de 3/2 avec respectivement pour chaque double matrice, 126 diviseurs ultimes contre 84 (3 fois 42 contre 2 fois 42).

### 10.2 Diviseurs ultimes et matrice linéaire

Figure 49, dans une réorganisation de la matrice des cent premiers nombres en quatre lignes de 25 entités ( $\rightarrow 25 = 3^2 + (3 \times 2) + (2 \times 3) + 2^2$ , voir chapitre 7.1.1), les 210 diviseurs ultimes s'opposent en un ratio de 3/2 dans deux matrices symétriquement opposées de 60 contre 40 entités avec, respectivement dans chaque matrice, 126 contre 84 diviseurs ultimes.

Matrice de 4 fois $(3^2 + (3 \times 2)) = 36 + 24 = 60$ nombres ( $\rightarrow 4$ fois $(a^2 + ab)$ )																								
<b>126 diviseurs ultimes</b>																								
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
0	0	0	0	2	0	2	0	3	2	2	0	3	0	2	2	4	0	3	0	3	2	2	0	4
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
2	2	3	3	0	3	0	5	2	2	2	4	0	2	2	4	0	3	0	3	3	2	0	5	2
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
3	2	3	0	4	2	4	2	2	0	4	0	2	3	6	2	3	0	3	2	3	0	5	0	2
75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
3	3	2	3	0	5	4	2	0	4	2	2	2	4	0	4	2	3	2	2	2	6	0	3	3
<b>84 diviseurs ultimes</b>																								
Matrice de 4 fois $(2^2 + (2 \times 3)) = 24 + 16 = 40$ nombres ( $\rightarrow 4$ fois $(b^2 + ba)$ )																								

Fig. 49 Décompte des diviseurs ultimes dans un redéploiement de la matrice des 100 premiers nombres s'inscrivant dans l'identité remarquable  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  où  $a$  et  $b$  ont les valeurs 3 et 2. Distribution des 210 diviseurs en ratio 3/2 dans deux sous matrices intriquées de 60 contre 40 entités.

### 10.3 Sous matrices symétriques

A l'intérieur de sous matrices symétriques constituées de 10 micro zones de 6 contre 4 entités, telles celles figure 50, les quantités de diviseurs ultimes constituant les cent premiers nombres s'opposent en ratios de valeurs 3/2 avec respectivement 126 diviseurs ultimes en sous matrices de 60 entités contre 84 diviseurs ultimes en sous matrices de 40 entités.

Sous matrice de 10 fois 6 nombres (60 nombres)			← ratio 3/2 →	Sous matrice de 10 fois 4 nombres (40 nombres)			Sous matrice de 10 fois 6 nombres (60 nombres)			← ratio 3/2 →	Sous matrice de 10 fois 4 nombres (40 nombres)			
0 0	2 0	3 2	0 0	2 0	3 2	0 0	2 0	3 2	0 0	2 0	3 2	0 0	2 0	3 2
2 0	2 2	3 0	3 0	4 0	3 0	3 0	4 0	3 0	2 0	4 0	3 0	2 0	2 2	3 0
3 2	2 0	4 2	2 3	3 0	3 0	3 0	2 2	2 2	3 2	2 0	4 2	2 3	3 0	3 0
	5 2		4 0			4 0	3 3	5 2		2 2		2 2		5 2
	3 0		2 0			3 2	4 2	2 0		3 3		5 2		3 0
	2 3		3			4 0	6 2	3 2		4 2		2 0		4 2
3 0	5 0	2 3	3 2	3 0		2 0			3 0	5 0	2 3	3 2	3 0	2 3
5 4		4 2		4 0		3 2			2 0	2 0		2 2		4 0
4 2		2 2		3 3		3 2	6 0		3 2	6 0		2 2		3 3
126 diviseur ultimes			← ratio 3/2 →	84 diviseur ultimes			126 diviseur ultimes			← ratio 3/2 →	84 diviseur ultimes			

Fig. 50 Quantités respectives des diviseurs ultimes constituant les cent premiers nombres. Voir matrice figure 47.

### 10.4 Première apparition des quinze diviseurs ultimes

Dans ces deux mêmes doubles sous matrices géométriquement symétriques, il s'avère, figure 51, que la première apparition des quinze diviseurs ultimes (voir figure 47) s'organise aussi en un parfait ratio de valeur 3/2 avec neuf premières apparitions en sous matrices de 60 nombres contre six premières apparitions en sous matrices de 40 nombres.

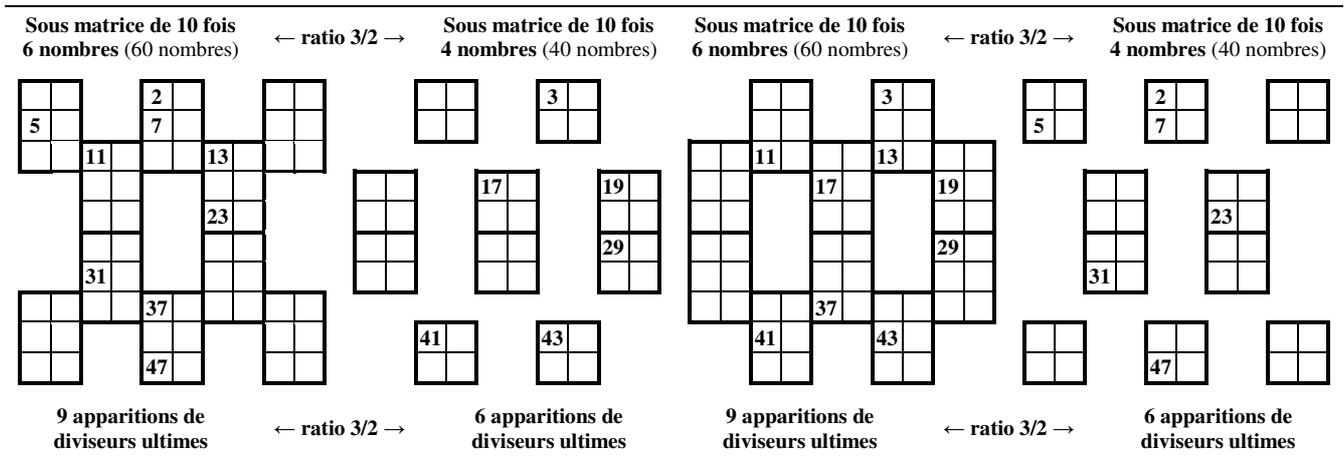


Fig. 51 Distribution de la première apparition des 15 diviseurs ultimes dans la matrice des 100 premiers nombres.

### 11. Interactions des quatre classes de nombres

La distinction des quatre classes de nombres introduites chapitre 8 génèrent des phénomènes arithmétiques singuliers dans différentes interactions d'entités comme l'opposition des nombres de classes dites *extrêmes* et *médianes* ou l'étude des différentes associations possibles de couples de nombres selon leur appartenance à telle ou telle classe. Enfin le croisement de ces différents critères directement envers les vingt nombres fondamentaux (notion introduite chapitre 2.5), puis indirectement depuis une matrice dont ils sont source, fait encore apparaître les mêmes types de phénomènes arithmétiques que ceux présentés à nombreuses reprises en amont de cet étude. Ces dernières investigations légitiment indéniablement toutes les nouvelles classifications mathématiques proposées des nombres entiers naturels.

#### 11.1 Association des classes opposées

Selon leur degré de complexité, les quatre classes de nombres peuvent être regroupés en deux ensembles de classes extrêmes ou médianes. Ainsi, les nombres ultimes, de complexité de niveau 1 et les nombres mixtes, de complexité de niveau 4 forment un ensemble d'entités de classes extrêmes et les nombres élevés et composés, de complexité de niveau 2 et 3 forment un second ensemble de classes médianes. Il est convenu que l'appellation "extrêmes" désigne les nombres de classes extrêmes et l'appellation "médians" désigne les nombres de classes médianes.

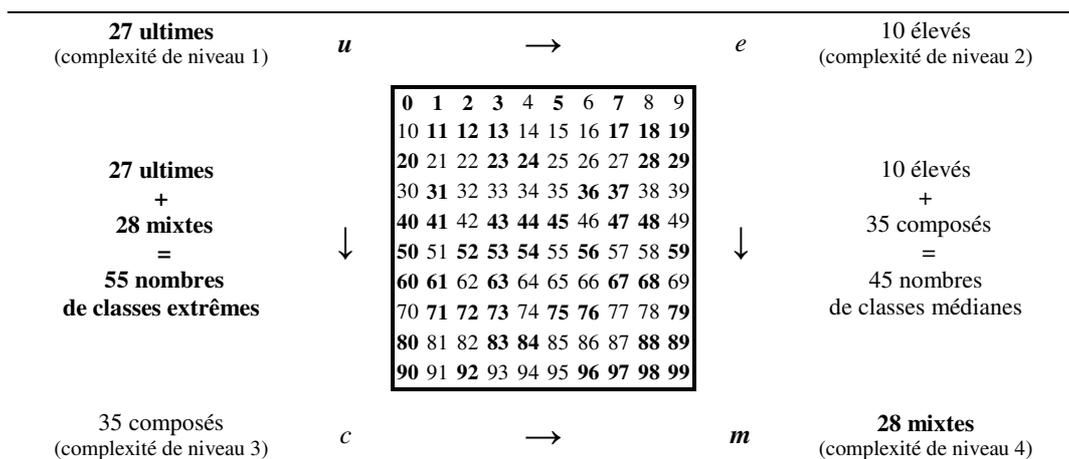


Fig. 52 Décompte des quatre classes de nombres dans la matrice des 100 premiers nombres selon leur degré de complexité (voir fig. 37 et 47).

Figure 52, dans la matrice des cent premiers nombres, ces deux ensembles sont constitués de 55 nombres de classes extrêmes et de 45 nombres de classes médianes. Dans des sous matrices de plus en plus diluées de 60 contre 40 entités, ces deux familles de nombres se distribuent toujours en ratios de valeurs 3/2.

### 11.1.1 Dilution de sous matrices

Ainsi, en partie gauche de la figure 53, dans deux blocs compacts de 60 contre 40 entités constitués respectivement des 60 premiers nombres et des 40 suivants, les nombres extrêmes et les nombres médians se répartissent en ratios de valeurs 3/2 avec, respectivement pour chaque ensemble de nombres, 33 extrêmes contre 22 et 27 médians contre 18. Le fractionnement de la matrice des cent premiers nombres en 10 blocs de 5 fois 12 et 5 fois 8 entités tel qu'illustré en partie droite de la figure 53 génère les mêmes phénomènes arithmétiques.

Sous matrice de (1 fois) 60 nombres	← ratio 3/2 →	Sous matrice de (1 fois) 40 nombres	← ratio 3/2 →	Sous matrice de 5 fois 12 nombres (60 nombres)	← ratio 3/2 →	Sous matrice de 5 fois 8 nombres (40 nombres)																																																																																																																																																																																																										
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td></tr> <tr><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td></tr> <tr><td>30</td><td>31</td><td>32</td><td>33</td><td>34</td><td>35</td><td>36</td><td>37</td><td>38</td><td>39</td></tr> <tr><td>40</td><td>41</td><td>42</td><td>43</td><td>44</td><td>45</td><td>46</td><td>47</td><td>48</td><td>49</td></tr> <tr><td>50</td><td>51</td><td>52</td><td>53</td><td>54</td><td>55</td><td>56</td><td>57</td><td>58</td><td>59</td></tr> </table>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>60</td><td>61</td><td>62</td><td>63</td><td>64</td><td>65</td><td>66</td><td>67</td><td>68</td><td>69</td></tr> <tr><td>70</td><td>71</td><td>72</td><td>73</td><td>74</td><td>75</td><td>76</td><td>77</td><td>78</td><td>79</td></tr> <tr><td>80</td><td>81</td><td>82</td><td>83</td><td>84</td><td>85</td><td>86</td><td>87</td><td>88</td><td>89</td></tr> <tr><td>90</td><td>91</td><td>92</td><td>93</td><td>94</td><td>95</td><td>96</td><td>97</td><td>98</td><td>99</td></tr> </table>	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>10</td><td>11</td><td>14</td><td>15</td><td>18</td><td>19</td></tr> <tr><td>20</td><td>21</td><td>24</td><td>25</td><td>28</td><td>29</td></tr> <tr><td>30</td><td>31</td><td>34</td><td>35</td><td>38</td><td>39</td></tr> <tr><td>40</td><td>41</td><td>42</td><td>43</td><td>44</td><td>45</td><td>46</td><td>47</td><td>48</td><td>49</td></tr> <tr><td>50</td><td>51</td><td>52</td><td>53</td><td>54</td><td>55</td><td>56</td><td>57</td><td>58</td><td>59</td></tr> <tr><td>62</td><td>63</td><td>66</td><td>67</td><td>70</td><td>71</td><td>72</td><td>73</td><td>76</td><td>77</td></tr> <tr><td>82</td><td>83</td><td>86</td><td>87</td><td>92</td><td>93</td><td>96</td><td>97</td></tr> </table>	0	1	4	5	8	9	10	11	14	15	18	19	20	21	24	25	28	29	30	31	34	35	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	62	63	66	67	70	71	72	73	76	77	82	83	86	87	92	93	96	97		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>2</td><td>3</td><td>6</td><td>7</td></tr> <tr><td>12</td><td>13</td><td>16</td><td>17</td></tr> <tr><td>22</td><td>23</td><td>26</td><td>27</td></tr> <tr><td>32</td><td>33</td><td>36</td><td>37</td></tr> <tr><td>60</td><td>61</td><td>64</td><td>65</td><td>68</td><td>69</td></tr> <tr><td>70</td><td>71</td><td>74</td><td>75</td><td>78</td><td>79</td></tr> <tr><td>80</td><td>81</td><td>84</td><td>85</td><td>88</td><td>89</td></tr> <tr><td>90</td><td>91</td><td>94</td><td>95</td><td>98</td><td>99</td></tr> </table>	2	3	6	7	12	13	16	17	22	23	26	27	32	33	36	37	60	61	64	65	68	69	70	71	74	75	78	79	80	81	84	85	88	89	90	91	94	95	98	99
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																																																																																																																																																							
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19																																																																																																																																																																																																							
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29																																																																																																																																																																																																							
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39																																																																																																																																																																																																							
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49																																																																																																																																																																																																							
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59																																																																																																																																																																																																							
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69																																																																																																																																																																																																							
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79																																																																																																																																																																																																							
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89																																																																																																																																																																																																							
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99																																																																																																																																																																																																							
0	1	4	5	8	9																																																																																																																																																																																																											
10	11	14	15	18	19																																																																																																																																																																																																											
20	21	24	25	28	29																																																																																																																																																																																																											
30	31	34	35	38	39																																																																																																																																																																																																											
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49																																																																																																																																																																																																							
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59																																																																																																																																																																																																							
62	63	66	67	70	71	72	73	76	77																																																																																																																																																																																																							
82	83	86	87	92	93	96	97																																																																																																																																																																																																									
2	3	6	7																																																																																																																																																																																																													
12	13	16	17																																																																																																																																																																																																													
22	23	26	27																																																																																																																																																																																																													
32	33	36	37																																																																																																																																																																																																													
60	61	64	65	68	69																																																																																																																																																																																																											
70	71	74	75	78	79																																																																																																																																																																																																											
80	81	84	85	88	89																																																																																																																																																																																																											
90	91	94	95	98	99																																																																																																																																																																																																											
33 extrêmes 27 médians	← ratio 3/2 →	22 extrêmes 18 médians	← ratio 3/2 →	33 extrêmes 27 médians	← ratio 3/2 →	22 extrêmes 18 médians																																																																																																																																																																																																										

Fig. 53 Distribution des nombres de classes extrêmes et médians dans deux doubles sous matrices peu diluées et plus diluées des 100 premiers nombres.

Aussi, les deux ensembles de nombres extrêmes et médians se répartissent encore en ratios de valeur 3/2 dans un fractionnement plus dilué de cette matrice en 20 blocs de 10 fois 6 et 10 fois 4 entités comme décrit en partie gauche de la figure 53. Enfin, partie droite de la figure 53, dans un fractionnement final de cette matrice en 40 blocs de 20 fois 3 entités contre 20 fois 2 entités, les mêmes partitions des deux familles de nombres en ratios 3/2 s'observent encore avec toujours 33 contre 22 extrêmes et 27 contre 18 médians.

Sous matrice de 10 fois 6 nombres (60 nombres)	← ratio 3/2 →	Sous matrice de 10 fois 4 nombres (40 nombres)	← ratio 3/2 →	Sous matrice de 20 fois 3 nombres (60 nombres)	← ratio 3/2 →	Sous matrice de 20 fois 2 nombres (40 nombres)																																																																																																																																																																																																															
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>10</td><td>11</td><td>14</td><td>15</td><td>18</td><td>19</td></tr> <tr><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td></tr> <tr><td>32</td><td>33</td><td>36</td><td>37</td><td>38</td><td>39</td></tr> <tr><td>42</td><td>43</td><td>46</td><td>47</td><td>48</td><td>49</td></tr> <tr><td>52</td><td>53</td><td>56</td><td>57</td><td>58</td><td>59</td></tr> <tr><td>62</td><td>63</td><td>66</td><td>67</td><td>68</td><td>69</td></tr> <tr><td>70</td><td>71</td><td>72</td><td>73</td><td>74</td><td>75</td><td>76</td><td>77</td><td>78</td><td>79</td></tr> <tr><td>80</td><td>81</td><td>84</td><td>85</td><td>88</td><td>89</td></tr> <tr><td>90</td><td>91</td><td>94</td><td>95</td><td>98</td><td>99</td></tr> </table>	0	1	4	5	8	9	10	11	14	15	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	32	33	36	37	38	39	42	43	46	47	48	49	52	53	56	57	58	59	62	63	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	84	85	88	89	90	91	94	95	98	99		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>2</td><td>3</td><td>6</td><td>7</td></tr> <tr><td>12</td><td>13</td><td>16</td><td>17</td></tr> <tr><td>30</td><td>31</td><td>34</td><td>35</td><td>38</td><td>39</td></tr> <tr><td>40</td><td>41</td><td>44</td><td>45</td><td>48</td><td>49</td></tr> <tr><td>50</td><td>51</td><td>54</td><td>55</td><td>58</td><td>59</td></tr> <tr><td>60</td><td>61</td><td>64</td><td>65</td><td>68</td><td>69</td></tr> <tr><td>82</td><td>83</td><td>86</td><td>87</td><td>92</td><td>93</td><td>96</td><td>97</td></tr> </table>	2	3	6	7	12	13	16	17	30	31	34	35	38	39	40	41	44	45	48	49	50	51	54	55	58	59	60	61	64	65	68	69	82	83	86	87	92	93	96	97		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr> <tr><td>10</td><td>12</td><td>14</td><td>16</td><td>18</td></tr> <tr><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td></tr> <tr><td>31</td><td>33</td><td>35</td><td>37</td><td>39</td></tr> <tr><td>41</td><td>43</td><td>45</td><td>47</td><td>49</td></tr> <tr><td>51</td><td>53</td><td>55</td><td>57</td><td>59</td></tr> <tr><td>61</td><td>63</td><td>65</td><td>67</td><td>69</td></tr> <tr><td>70</td><td>71</td><td>72</td><td>73</td><td>74</td><td>75</td><td>76</td><td>77</td><td>78</td><td>79</td></tr> <tr><td>80</td><td>82</td><td>84</td><td>86</td><td>88</td><td>92</td><td>94</td><td>96</td><td>98</td></tr> </table>	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	82	84	86	88	92	94	96	98		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td></tr> <tr><td>11</td><td>13</td><td>15</td><td>17</td><td>19</td></tr> <tr><td>30</td><td>32</td><td>34</td><td>36</td><td>38</td></tr> <tr><td>40</td><td>42</td><td>44</td><td>46</td><td>48</td></tr> <tr><td>50</td><td>52</td><td>54</td><td>56</td><td>58</td></tr> <tr><td>60</td><td>62</td><td>64</td><td>66</td><td>68</td></tr> <tr><td>81</td><td>83</td><td>85</td><td>87</td><td>89</td><td>91</td><td>93</td><td>95</td><td>97</td><td>99</td></tr> </table>	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99
0	1	4	5	8	9																																																																																																																																																																																																																
10	11	14	15	18	19																																																																																																																																																																																																																
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29																																																																																																																																																																																																												
32	33	36	37	38	39																																																																																																																																																																																																																
42	43	46	47	48	49																																																																																																																																																																																																																
52	53	56	57	58	59																																																																																																																																																																																																																
62	63	66	67	68	69																																																																																																																																																																																																																
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79																																																																																																																																																																																																												
80	81	84	85	88	89																																																																																																																																																																																																																
90	91	94	95	98	99																																																																																																																																																																																																																
2	3	6	7																																																																																																																																																																																																																		
12	13	16	17																																																																																																																																																																																																																		
30	31	34	35	38	39																																																																																																																																																																																																																
40	41	44	45	48	49																																																																																																																																																																																																																
50	51	54	55	58	59																																																																																																																																																																																																																
60	61	64	65	68	69																																																																																																																																																																																																																
82	83	86	87	92	93	96	97																																																																																																																																																																																																														
0	2	4	6	8																																																																																																																																																																																																																	
10	12	14	16	18																																																																																																																																																																																																																	
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29																																																																																																																																																																																																												
31	33	35	37	39																																																																																																																																																																																																																	
41	43	45	47	49																																																																																																																																																																																																																	
51	53	55	57	59																																																																																																																																																																																																																	
61	63	65	67	69																																																																																																																																																																																																																	
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79																																																																																																																																																																																																												
80	82	84	86	88	92	94	96	98																																																																																																																																																																																																													
1	3	5	7	9																																																																																																																																																																																																																	
11	13	15	17	19																																																																																																																																																																																																																	
30	32	34	36	38																																																																																																																																																																																																																	
40	42	44	46	48																																																																																																																																																																																																																	
50	52	54	56	58																																																																																																																																																																																																																	
60	62	64	66	68																																																																																																																																																																																																																	
81	83	85	87	89	91	93	95	97	99																																																																																																																																																																																																												
33 extrêmes 27 médians	← ratio 3/2 →	22 extrêmes 18 médians	← ratio 3/2 →	33 extrêmes 27 médians	← ratio 3/2 →	22 extrêmes 18 médians																																																																																																																																																																																																															

Fig. 54 Distribution des nombres de classes extrêmes et médians dans deux doubles sous matrices diluées et très diluées des 100 premiers nombres.

### 11.1.2 Matrice de vingt-cinq entités

Comme il a été présenté au chapitre 7.1.1, il est nécessaire d'avoir un minimum de 25 entités pour que puissent s'opposer deux doubles ensembles de 9 contre 6 puis de 6 contre 4 nombres (et globalement de 15 contre 10 entités) en ratios transcendant de valeur 3/2. Aussi ces arrangements arithmétiques s'organisent depuis l'identité remarquable  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  où  $a$  et  $b$  ont les valeurs 3 et 2. Il se trouve justement que la matrice des 25 premiers nombres (matrice configurée depuis cette identité remarquable) génère ces phénomènes par l'opposition des nombres de classes extrêmes à ceux de classes médianes dont elle est constituée.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow (3+2)^2 = 3^2 + 2(3 \times 2) + 2^2 \rightarrow 9 + 6 + 6 + 4 = 25 \text{ entités}$$

	0	1	2	3	4	
9	5	6	7	8	9	6
$a^2$	10	11	12	13	14	$ab$
6	15	16	17	18	19	4
$ba$	20	21	22	23	24	$b^2$

15 extrêmes

← ratio 3/2 →

10 médians

Fig. 55 Opposition en ratio 3/2 des 15 premiers extrêmes et des 10 premiers médians dans une matrice de 25 entités déduite de l'identité remarquable  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  où  $a$  et  $b$  ont les valeurs 3 et 2.

Il apparaît donc, figure 55, que parmi les 25 premiers nombres se trouvent 15 entités de classes extrêmes qui s'opposent en un ratio de valeur 3/2 à 10 entités de classes médianes. Aussi, ces deux types de classes de nombres s'opposent, figure 56, en différents ratios transcendants de valeur 3/2 dans et entre les sous matrices dont la configuration est déduite de l'identité remarquable  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  où  $a$  et  $b$  ont pour valeur respective 3 et 2.

<p>Sous matrice de 9 + 6 nombres (<math>a^2 + ab</math>)</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td></tr> <tr><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td></tr> <tr><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr> </table> <p>9 extrêmes 6 médians ratio 3/2</p>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	← ratio 3/2 →	<p>Sous matrice de 6 + 4 nombres (<math>ba + b^2</math>)</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td></tr> <tr><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr> </table> <p>6 extrêmes 4 médians ratio 3/2</p>	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	← ratio 3/2 →	<p>Sous matrice de 9 + 6 nombres (<math>a^2 + ba</math>)</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td></tr> <tr><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td></tr> <tr><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr> </table> <p>9 extrêmes 6 médians ratio 3/2</p>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	← ratio 3/2 →	<p>Sous matrice de 6 + 4 nombres (<math>ab + b^2</math>)</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td></tr> <tr><td>18</td><td>19</td></tr> <tr><td>23</td><td>24</td></tr> </table> <p>6 extrêmes 4 médians ratio 3/2</p>	3	4	8	9	13	14	18	19	23	24
0	1	2	3	4																																																																								
5	6	7	8	9																																																																								
10	11	12	13	14																																																																								
15	16	17	18	19																																																																								
20	21	22	23	24																																																																								
15	16	17	18	19																																																																								
20	21	22	23	24																																																																								
0	1	2	3	4																																																																								
5	6	7	8	9																																																																								
10	11	12	13	14																																																																								
15	16	17	18	19																																																																								
20	21	22	23	24																																																																								
3	4																																																																											
8	9																																																																											
13	14																																																																											
18	19																																																																											
23	24																																																																											

Fig. 56 Distribution des nombres de classes extrêmes et médianes dans deux doubles sous matrices des 25 premiers nombres. Configurations déduites de l'identité  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  où  $a$  et  $b$  ont les valeurs 3 et 2.

Aussi, dans cette matrice des 25 premiers nombres, d'autres configurations de mêmes arrangements arithmétiques, mais qui sont redéployées géographiquement de variées autres façons, génèrent encore les mêmes phénomènes opposant les nombres de classes extrêmes et ceux de classes médianes en ratios transcendants de valeur 3/2. Les figures 57 et 58 illustrent ces singuliers phénomènes.

<p>Sous matrice de 9 + 6 nombres (<math>a^2 + 2ab/2</math>)</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td></td></tr> <tr><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>15</td><td>16</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>20</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table> <p>9 extrêmes 6 médians ratio 3/2</p>	0	1	2	3	4	5	6	7	8		10	11	12			15	16				20					← ratio 3/2 →	<p>Sous matrice de 6 + 4 nombres (<math>2ba/2 + b^2</math>)</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>9</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td></tr> <tr><td>17</td><td>18</td><td>19</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr> </table> <p>6 extrêmes 4 médians ratio 3/2</p>	9	13	14	17	18	19	21	22	23	24	← ratio 3/2 →	<p>Sous matrice de 9 + 6 nombres (<math>a^2 + ba</math>)</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td></tr> <tr><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td></tr> <tr><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr> </table> <p>9 extrêmes 6 médians ratio 3/2</p>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	← ratio 3/2 →	<p>Sous matrice de 6 + 4 nombres (<math>ab + b^2</math>)</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td></td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>19</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table> <p>6 extrêmes 4 médians ratio 3/2</p>	1	2	3	4	7	8	9		13	14			19			
0	1	2	3	4																																																																														
5	6	7	8																																																																															
10	11	12																																																																																
15	16																																																																																	
20																																																																																		
9																																																																																		
13	14																																																																																	
17	18	19																																																																																
21	22	23	24																																																																															
0	1	2	3	4																																																																														
5	6	7	8	9																																																																														
10	11	12	13	14																																																																														
15	16	17	18	19																																																																														
20	21	22	23	24																																																																														
1	2	3	4																																																																															
7	8	9																																																																																
13	14																																																																																	
19																																																																																		

Fig. 57 Distribution des nombres de classes extrêmes et médianes dans deux doubles sous matrices des 25 premiers nombres. Configurations déduites de l'identité  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  où  $a$  et  $b$  ont les valeurs 3 et 2.

Ces phénomènes s'inscrivent toujours et encore en différentes variables géométriques de l'identité remarquable  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  où  $a$  et  $b$  ont les valeurs 3 et 2.

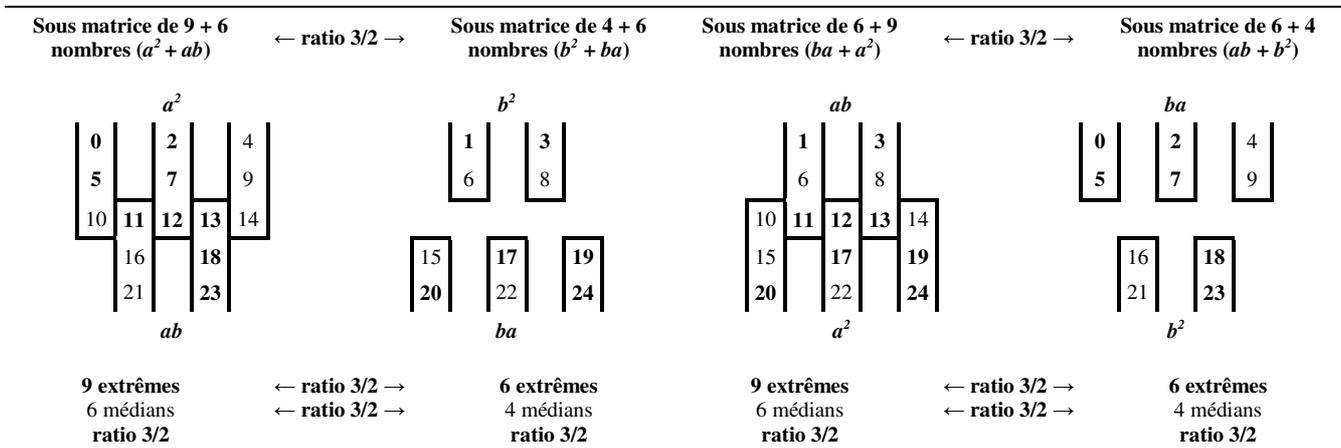


Fig. 58 Distribution des nombres de classes extrêmes et médians dans deux doubles sous matrices des 25 premiers nombres. Configurations déduites de l'identité  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  où  $a$  et  $b$  ont les valeurs 3 et 2.

### 11.2 Classes de nombres et couples de nombres

Selon leur classification en quatre classes tel que défini chapitre 8 ( $u$  = ultime,  $e$  = élevé,  $c$  = composé et  $m$  = mixte, voir figure 38 chapitre 8), les nombres entiers naturels peuvent être associés deux à deux en dix différentes configurations.

#### 11.2.1 Les dix associations de classes de nombres

Dans la matrice des cent premiers nombres entiers naturels classés linéairement en dix lignes de dix entités consécutives, il est possible de former 50 couples de nombres consécutifs. Ces couples peuvent s'agencer de dix différentes façons selon la classe respective des deux entités les constituant. Il s'avère figure 59 que, dans cette matrice, toutes les dix associations possibles sont représentées dont une seule mais bien présente association de deux nombres de classe élevé : le couple 8-9 ( $2^3$  et  $3^2$ ).

Pour amusement (mais peut-être pas) il est plaisant de remarquer que ces deux nombres sont les deux derniers des chiffres nombres. Aussi, leur valeur racine respective sont dans un ratio de 2/3 et il sont respectivement élevés de 3 et 2 puissances : encore un ratio de 3/2. Aussi, (la démonstration ne sera pas faite ici) il semblerait que ce soit le seul couple de nombres consécutifs de classe élevé parmi l'ensemble des nombres entiers naturels.

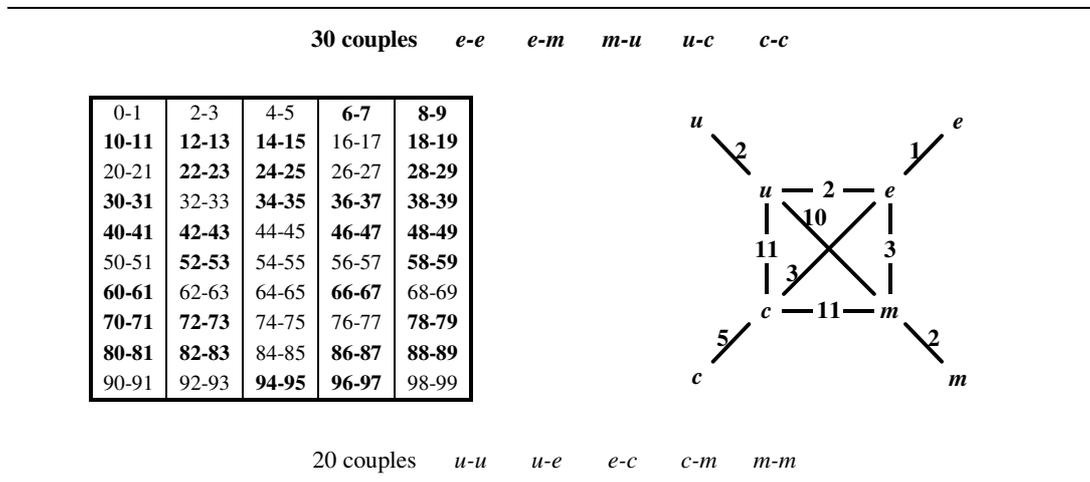


Fig. 59 Décompte des associations de classes de nombres des couples de nombres adjacents de la matrice des 100 premiers nombres (Voir aussi fig.60).

#### 11.2.2 Symétriques associations de classes de nombres

En regroupant cinq associations particulières de couples de nombres et cinq autres, il s'avère alors que, dans un ratio de 3/2, 30 couples sont constitués de ces cinq premières associations considérées et 20 couples sont constitués des cinq autres associations possibles. Comme le démontre la figure 57, ces deux groupes de cinq associations ne sont pas quelconques mais s'organisent en deux hyper configurations sub symétriques pouvant être nommées *configuration N* et *configuration Z*. Ceci, en référence à l'image dégagée de ces hyper configurations de deux fois cinq associations de nombres dans la schématisation de ces configurations.

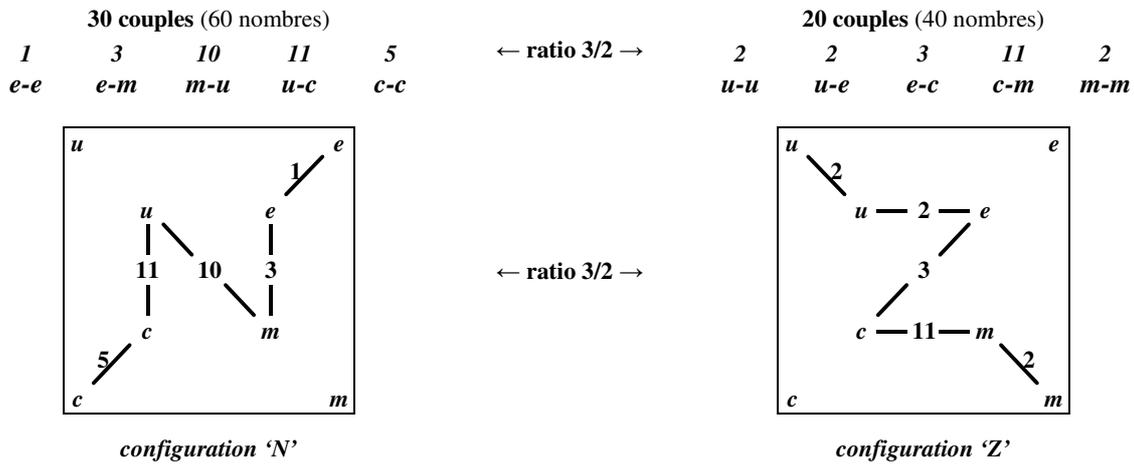


Fig. 60 Classification des 50 couples de nombres selon deux configurations symétriques d'associations de couples. Dans un ratio de valeur 3/2 : 30 couples de configuration N contre 20 couples de configurations Z (voir figure 59).

La configuration de type N présente deux *protubérances* constituées des associations de deux élevés (*e-e*) et de deux composés (*c-c*) soit des types de nombres de classes médianes. La configuration de type Z a ses deux similaires et symétriques *protubérances* constituées des associations de deux ultimes (*u-u*) et de deux mixtes (*m-m*) soit des types de nombres de classes extrêmes. Aussi, parmi les 30 couples de configuration N, 6 couples sont formés de deux nombres de mêmes classes (5 couples *c-c* et 1 couple *e-e*) et parmi les 20 couples de configuration Z, 4 couples sont formés de deux nombres de mêmes classes (2 couples *u-u* et 2 couples *m-m*). Là encore ces ensembles de couples s'opposent en ratio de valeur 3/2.

### 11.2.3 Associations de classes de nombres et ratios 3/2 transcendants

Dans deux doubles sous matrices verticales puis horizontales opposant des ensembles de 3 fois 10 couples et des ensembles de 2 fois 10 couples tel que présenté figure 61, les couples de nombres de configuration N et ceux de configuration Z s'opposent en ratios transcendants de valeurs 3/2. Dans ces configurations 18 couples N s'opposent simultanément à 12 couples Z et à 12 autres couples N et 8 couples Z s'opposent simultanément à 12 couples N et 12 autres couples Z.

<b>Sous matrice de 3 fois 10 couples (60 nombres)</b>	← ratio 3/2 →	<b>Sous matrice de 2 fois 10 couples (40 nombres)</b>	← ratio 3/2 →	<b>Sous matrice de 3 fois 10 couples (60 nombres)</b>	← ratio 3/2 →	<b>Sous matrice de 2 fois 10 couples (40 nombres)</b>																																																																																																																								
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black;">0-1</td><td style="border: 1px solid black;">4-5</td><td style="border: 1px solid black;">8-9</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">10-11</td><td style="border: 1px solid black;">14-15</td><td style="border: 1px solid black;">18-19</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">20-21</td><td style="border: 1px solid black;">24-25</td><td style="border: 1px solid black;">28-29</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">30-31</td><td style="border: 1px solid black;">34-35</td><td style="border: 1px solid black;">38-39</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">40-41</td><td style="border: 1px solid black;">44-45</td><td style="border: 1px solid black;">48-49</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">50-51</td><td style="border: 1px solid black;">54-55</td><td style="border: 1px solid black;">58-59</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">60-61</td><td style="border: 1px solid black;">64-65</td><td style="border: 1px solid black;">68-69</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">70-71</td><td style="border: 1px solid black;">74-75</td><td style="border: 1px solid black;">78-79</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">80-81</td><td style="border: 1px solid black;">84-85</td><td style="border: 1px solid black;">88-89</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">90-91</td><td style="border: 1px solid black;">94-95</td><td style="border: 1px solid black;">98-99</td></tr> </table>	0-1	4-5	8-9	10-11	14-15	18-19	20-21	24-25	28-29	30-31	34-35	38-39	40-41	44-45	48-49	50-51	54-55	58-59	60-61	64-65	68-69	70-71	74-75	78-79	80-81	84-85	88-89	90-91	94-95	98-99		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black;">2-3</td><td style="border: 1px solid black;">6-7</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">12-13</td><td style="border: 1px solid black;">16-17</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">22-23</td><td style="border: 1px solid black;">26-27</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">32-33</td><td style="border: 1px solid black;">36-37</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">42-43</td><td style="border: 1px solid black;">46-47</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">52-53</td><td style="border: 1px solid black;">56-57</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">62-63</td><td style="border: 1px solid black;">66-67</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">72-73</td><td style="border: 1px solid black;">76-77</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">82-83</td><td style="border: 1px solid black;">86-87</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">92-93</td><td style="border: 1px solid black;">96-97</td></tr> </table>	2-3	6-7	12-13	16-17	22-23	26-27	32-33	36-37	42-43	46-47	52-53	56-57	62-63	66-67	72-73	76-77	82-83	86-87	92-93	96-97		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black;">0-1</td><td style="border: 1px solid black;">2-3</td><td style="border: 1px solid black;">4-5</td><td style="border: 1px solid black;">6-7</td><td style="border: 1px solid black;">8-9</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">10-11</td><td style="border: 1px solid black;">12-13</td><td style="border: 1px solid black;">14-15</td><td style="border: 1px solid black;">16-17</td><td style="border: 1px solid black;">18-19</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">20-21</td><td style="border: 1px solid black;">22-23</td><td style="border: 1px solid black;">24-25</td><td style="border: 1px solid black;">26-27</td><td style="border: 1px solid black;">28-29</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">30-31</td><td style="border: 1px solid black;">32-33</td><td style="border: 1px solid black;">34-35</td><td style="border: 1px solid black;">36-37</td><td style="border: 1px solid black;">38-39</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">40-41</td><td style="border: 1px solid black;">42-43</td><td style="border: 1px solid black;">44-45</td><td style="border: 1px solid black;">46-47</td><td style="border: 1px solid black;">48-49</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">50-51</td><td style="border: 1px solid black;">52-53</td><td style="border: 1px solid black;">54-55</td><td style="border: 1px solid black;">56-57</td><td style="border: 1px solid black;">58-59</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">60-61</td><td style="border: 1px solid black;">62-63</td><td style="border: 1px solid black;">64-65</td><td style="border: 1px solid black;">66-67</td><td style="border: 1px solid black;">68-69</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">70-71</td><td style="border: 1px solid black;">72-73</td><td style="border: 1px solid black;">74-75</td><td style="border: 1px solid black;">76-77</td><td style="border: 1px solid black;">78-79</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">80-81</td><td style="border: 1px solid black;">82-83</td><td style="border: 1px solid black;">84-85</td><td style="border: 1px solid black;">86-87</td><td style="border: 1px solid black;">88-89</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">90-91</td><td style="border: 1px solid black;">92-93</td><td style="border: 1px solid black;">94-95</td><td style="border: 1px solid black;">96-97</td><td style="border: 1px solid black;">98-99</td></tr> </table>	0-1	2-3	4-5	6-7	8-9	10-11	12-13	14-15	16-17	18-19	20-21	22-23	24-25	26-27	28-29	30-31	32-33	34-35	36-37	38-39	40-41	42-43	44-45	46-47	48-49	50-51	52-53	54-55	56-57	58-59	60-61	62-63	64-65	66-67	68-69	70-71	72-73	74-75	76-77	78-79	80-81	82-83	84-85	86-87	88-89	90-91	92-93	94-95	96-97	98-99		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black;">20-21</td><td style="border: 1px solid black;">22-23</td><td style="border: 1px solid black;">24-25</td><td style="border: 1px solid black;">26-27</td><td style="border: 1px solid black;">28-29</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">30-31</td><td style="border: 1px solid black;">32-33</td><td style="border: 1px solid black;">34-35</td><td style="border: 1px solid black;">36-37</td><td style="border: 1px solid black;">38-39</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">60-61</td><td style="border: 1px solid black;">62-63</td><td style="border: 1px solid black;">64-65</td><td style="border: 1px solid black;">66-67</td><td style="border: 1px solid black;">68-69</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">70-71</td><td style="border: 1px solid black;">72-73</td><td style="border: 1px solid black;">74-75</td><td style="border: 1px solid black;">76-77</td><td style="border: 1px solid black;">78-79</td></tr> </table>	20-21	22-23	24-25	26-27	28-29	30-31	32-33	34-35	36-37	38-39	60-61	62-63	64-65	66-67	68-69	70-71	72-73	74-75	76-77	78-79
0-1	4-5	8-9																																																																																																																												
10-11	14-15	18-19																																																																																																																												
20-21	24-25	28-29																																																																																																																												
30-31	34-35	38-39																																																																																																																												
40-41	44-45	48-49																																																																																																																												
50-51	54-55	58-59																																																																																																																												
60-61	64-65	68-69																																																																																																																												
70-71	74-75	78-79																																																																																																																												
80-81	84-85	88-89																																																																																																																												
90-91	94-95	98-99																																																																																																																												
2-3	6-7																																																																																																																													
12-13	16-17																																																																																																																													
22-23	26-27																																																																																																																													
32-33	36-37																																																																																																																													
42-43	46-47																																																																																																																													
52-53	56-57																																																																																																																													
62-63	66-67																																																																																																																													
72-73	76-77																																																																																																																													
82-83	86-87																																																																																																																													
92-93	96-97																																																																																																																													
0-1	2-3	4-5	6-7	8-9																																																																																																																										
10-11	12-13	14-15	16-17	18-19																																																																																																																										
20-21	22-23	24-25	26-27	28-29																																																																																																																										
30-31	32-33	34-35	36-37	38-39																																																																																																																										
40-41	42-43	44-45	46-47	48-49																																																																																																																										
50-51	52-53	54-55	56-57	58-59																																																																																																																										
60-61	62-63	64-65	66-67	68-69																																																																																																																										
70-71	72-73	74-75	76-77	78-79																																																																																																																										
80-81	82-83	84-85	86-87	88-89																																																																																																																										
90-91	92-93	94-95	96-97	98-99																																																																																																																										
20-21	22-23	24-25	26-27	28-29																																																																																																																										
30-31	32-33	34-35	36-37	38-39																																																																																																																										
60-61	62-63	64-65	66-67	68-69																																																																																																																										
70-71	72-73	74-75	76-77	78-79																																																																																																																										
18 couples N 12 couples Z <b>ratio 3/2</b>	← ratio 3/2 →	12 couples N 8 couples Z <b>ratio 3/2</b>	← ratio 3/2 →	18 couples N 12 couples Z <b>ratio 3/2</b>	← ratio 3/2 →	12 couples N 8 couples Z <b>ratio 3/2</b>																																																																																																																								

Fig. 61 Distribution des couples de configuration N (*e-e e-m m-u u-c c-c*) et de configuration Z (*u-u u-e e-c c-m m-m*) dans des sous matrices verticales et horizontales de 30 contre 20 couples de nombres adjacents.

Dans cette matrice des cent premiers nombres, les mêmes phénomènes arithmétiques apparaissent, figure 62, tant dans l'opposition des 30 couples verticalement périphériques aux 20 couples verticalement centraux que de même dans l'opposition des 20 couples périphériques aux 30 couples centraux.

Sous matrice de 10 fois 3 couples (60 nombres)	← ratio 3/2 →	Sous matrice de 10 fois 2 couples (40 nombres)	Sous matrice de 10 fois 3 couples (60 nombres)	← ratio 3/2 →	Sous matrice de 10 fois 2 couples (40 nombres)																																																																																																																																		
<table border="1"> <tr><td>0-1</td><td>2-3</td><td>4-5</td><td>6-7</td><td>8-9</td></tr> <tr><td>10-11</td><td>12-13</td><td>14-15</td><td>16-17</td><td>18-19</td></tr> <tr><td>20-21</td><td>22-23</td><td>24-25</td><td>26-27</td><td>28-29</td></tr> <tr><td colspan="5"> </td></tr> <tr><td>70-71</td><td>72-73</td><td>74-75</td><td>76-77</td><td>78-79</td></tr> <tr><td>80-81</td><td>82-83</td><td>84-85</td><td>86-87</td><td>88-89</td></tr> <tr><td>90-91</td><td>92-93</td><td>94-95</td><td>96-97</td><td>98-99</td></tr> </table>	0-1	2-3	4-5	6-7	8-9	10-11	12-13	14-15	16-17	18-19	20-21	22-23	24-25	26-27	28-29						70-71	72-73	74-75	76-77	78-79	80-81	82-83	84-85	86-87	88-89	90-91	92-93	94-95	96-97	98-99		<table border="1"> <tr><td colspan="5"> </td></tr> <tr><td>30-31</td><td>32-33</td><td>34-35</td><td>36-37</td><td>38-39</td></tr> <tr><td>40-41</td><td>42-43</td><td>44-45</td><td>46-47</td><td>48-49</td></tr> <tr><td>50-51</td><td>52-53</td><td>54-55</td><td>56-57</td><td>58-59</td></tr> <tr><td>60-61</td><td>62-63</td><td>64-65</td><td>66-67</td><td>68-69</td></tr> <tr><td colspan="5"> </td></tr> </table>						30-31	32-33	34-35	36-37	38-39	40-41	42-43	44-45	46-47	48-49	50-51	52-53	54-55	56-57	58-59	60-61	62-63	64-65	66-67	68-69						<table border="1"> <tr><td colspan="5"> </td></tr> <tr><td>20-21</td><td>22-23</td><td>24-25</td><td>26-27</td><td>28-29</td></tr> <tr><td>30-31</td><td>32-33</td><td>34-35</td><td>36-37</td><td>38-39</td></tr> <tr><td>40-41</td><td>42-43</td><td>44-45</td><td>46-47</td><td>48-49</td></tr> <tr><td>50-51</td><td>52-53</td><td>54-55</td><td>56-57</td><td>58-59</td></tr> <tr><td>60-61</td><td>62-63</td><td>64-65</td><td>66-67</td><td>68-69</td></tr> <tr><td>70-71</td><td>72-73</td><td>74-75</td><td>76-77</td><td>78-79</td></tr> <tr><td colspan="5"> </td></tr> </table>						20-21	22-23	24-25	26-27	28-29	30-31	32-33	34-35	36-37	38-39	40-41	42-43	44-45	46-47	48-49	50-51	52-53	54-55	56-57	58-59	60-61	62-63	64-65	66-67	68-69	70-71	72-73	74-75	76-77	78-79							<table border="1"> <tr><td>0-1</td><td>2-3</td><td>4-5</td><td>6-7</td><td>8-9</td></tr> <tr><td>10-11</td><td>12-13</td><td>14-15</td><td>16-17</td><td>18-19</td></tr> <tr><td colspan="5"> </td></tr> <tr><td>80-81</td><td>82-83</td><td>84-85</td><td>86-87</td><td>88-89</td></tr> <tr><td>90-91</td><td>92-93</td><td>94-95</td><td>96-97</td><td>98-99</td></tr> </table>	0-1	2-3	4-5	6-7	8-9	10-11	12-13	14-15	16-17	18-19						80-81	82-83	84-85	86-87	88-89	90-91	92-93	94-95	96-97	98-99
0-1	2-3	4-5	6-7	8-9																																																																																																																																			
10-11	12-13	14-15	16-17	18-19																																																																																																																																			
20-21	22-23	24-25	26-27	28-29																																																																																																																																			
70-71	72-73	74-75	76-77	78-79																																																																																																																																			
80-81	82-83	84-85	86-87	88-89																																																																																																																																			
90-91	92-93	94-95	96-97	98-99																																																																																																																																			
30-31	32-33	34-35	36-37	38-39																																																																																																																																			
40-41	42-43	44-45	46-47	48-49																																																																																																																																			
50-51	52-53	54-55	56-57	58-59																																																																																																																																			
60-61	62-63	64-65	66-67	68-69																																																																																																																																			
20-21	22-23	24-25	26-27	28-29																																																																																																																																			
30-31	32-33	34-35	36-37	38-39																																																																																																																																			
40-41	42-43	44-45	46-47	48-49																																																																																																																																			
50-51	52-53	54-55	56-57	58-59																																																																																																																																			
60-61	62-63	64-65	66-67	68-69																																																																																																																																			
70-71	72-73	74-75	76-77	78-79																																																																																																																																			
0-1	2-3	4-5	6-7	8-9																																																																																																																																			
10-11	12-13	14-15	16-17	18-19																																																																																																																																			
80-81	82-83	84-85	86-87	88-89																																																																																																																																			
90-91	92-93	94-95	96-97	98-99																																																																																																																																			
18 couples <i>N</i> 12 couples <i>Z</i> ratio 3/2	← ratio 3/2 →	12 couples <i>N</i> 8 couples <i>Z</i> ratio 3/2	18 couples <i>N</i> 12 couples <i>Z</i> ratio 3/2	← ratio 3/2 →	12 couples <i>N</i> 8 couples <i>Z</i> ratio 3/2																																																																																																																																		

Fig. 62 Distribution des couples de configuration *N* (*e-e e-m m-u u-c c-c*) et de configuration *Z* (*u-u u-e e-c c-m m-m*) dans des sous matrices verticales de 30 contre 20 couples de nombres adjacents.

Aussi, ces mêmes phénomènes arithmétiques se produisent encore dans de sous matrices plus *diluées* tel que celles illustrées figure 63 et de configurations identiques à celles déjà introduites plus haut dans cette étude des nombres entiers naturels.

Sous matrice de 10 fois 3 couples (60 nombres)	← ratio 3/2 →	Sous matrice de 10 fois 2 couples (40 nombres)	Sous matrice de 10 fois 3 couples (60 nombres)	← ratio 3/2 →	Sous matrice de 10 fois 2 couples (40 nombres)																																																																																																																																																																																														
<table border="1"> <tr><td>0-1</td><td> </td><td>4-5</td><td> </td><td>8-9</td></tr> <tr><td>10-11</td><td> </td><td>14-15</td><td> </td><td>18-19</td></tr> <tr><td>20-21</td><td>22-23</td><td>24-25</td><td>26-27</td><td>28-29</td></tr> <tr><td> </td><td>32-33</td><td> </td><td>36-37</td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td>42-43</td><td> </td><td>46-47</td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td>52-53</td><td> </td><td>56-57</td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td>62-63</td><td> </td><td>66-67</td><td> </td></tr> <tr><td>70-71</td><td>72-73</td><td>74-75</td><td>76-77</td><td>78-79</td></tr> <tr><td>80-81</td><td> </td><td>84-85</td><td> </td><td>88-89</td></tr> <tr><td>90-91</td><td> </td><td>94-95</td><td> </td><td>98-99</td></tr> </table>	0-1		4-5		8-9	10-11		14-15		18-19	20-21	22-23	24-25	26-27	28-29		32-33		36-37			42-43		46-47			52-53		56-57			62-63		66-67		70-71	72-73	74-75	76-77	78-79	80-81		84-85		88-89	90-91		94-95		98-99		<table border="1"> <tr><td> </td><td>2-3</td><td> </td><td>6-7</td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td>12-13</td><td> </td><td>16-17</td><td> </td></tr> <tr><td>30-31</td><td> </td><td>34-35</td><td> </td><td>38-39</td></tr> <tr><td>40-41</td><td> </td><td>44-45</td><td> </td><td>48-49</td></tr> <tr><td>50-51</td><td> </td><td>54-55</td><td> </td><td>58-59</td></tr> <tr><td>60-61</td><td> </td><td>64-65</td><td> </td><td>68-69</td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td>82-83</td><td> </td><td>86-87</td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td>92-93</td><td> </td><td>96-97</td><td> </td></tr> </table>		2-3		6-7			12-13		16-17		30-31		34-35		38-39	40-41		44-45		48-49	50-51		54-55		58-59	60-61		64-65		68-69							82-83		86-87			92-93		96-97		<table border="1"> <tr><td> </td><td>2-3</td><td> </td><td>6-7</td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td>12-13</td><td> </td><td>16-17</td><td> </td></tr> <tr><td>20-21</td><td>22-23</td><td>24-25</td><td>26-27</td><td>28-29</td></tr> <tr><td>30-31</td><td> </td><td>34-35</td><td> </td><td>38-39</td></tr> <tr><td>40-41</td><td> </td><td>44-45</td><td> </td><td>48-49</td></tr> <tr><td>50-51</td><td> </td><td>54-55</td><td> </td><td>58-59</td></tr> <tr><td>60-61</td><td> </td><td>64-65</td><td> </td><td>68-69</td></tr> <tr><td>70-71</td><td>72-73</td><td>74-75</td><td>76-77</td><td>78-79</td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td>82-83</td><td> </td><td>86-87</td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td>92-93</td><td> </td><td>96-97</td><td> </td></tr> </table>		2-3		6-7			12-13		16-17		20-21	22-23	24-25	26-27	28-29	30-31		34-35		38-39	40-41		44-45		48-49	50-51		54-55		58-59	60-61		64-65		68-69	70-71	72-73	74-75	76-77	78-79							82-83		86-87			92-93		96-97			<table border="1"> <tr><td>0-1</td><td> </td><td>4-5</td><td> </td><td>8-9</td></tr> <tr><td>10-11</td><td> </td><td>14-15</td><td> </td><td>18-19</td></tr> <tr><td> </td><td>32-33</td><td> </td><td>36-37</td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td>42-43</td><td> </td><td>46-47</td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td>52-53</td><td> </td><td>56-57</td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td>62-63</td><td> </td><td>66-67</td><td> </td></tr> <tr><td>80-81</td><td> </td><td>84-85</td><td> </td><td>88-89</td></tr> <tr><td>90-91</td><td> </td><td>94-95</td><td> </td><td>98-99</td></tr> </table>	0-1		4-5		8-9	10-11		14-15		18-19		32-33		36-37			42-43		46-47			52-53		56-57			62-63		66-67		80-81		84-85		88-89	90-91		94-95		98-99
0-1		4-5		8-9																																																																																																																																																																																															
10-11		14-15		18-19																																																																																																																																																																																															
20-21	22-23	24-25	26-27	28-29																																																																																																																																																																																															
	32-33		36-37																																																																																																																																																																																																
	42-43		46-47																																																																																																																																																																																																
	52-53		56-57																																																																																																																																																																																																
	62-63		66-67																																																																																																																																																																																																
70-71	72-73	74-75	76-77	78-79																																																																																																																																																																																															
80-81		84-85		88-89																																																																																																																																																																																															
90-91		94-95		98-99																																																																																																																																																																																															
	2-3		6-7																																																																																																																																																																																																
	12-13		16-17																																																																																																																																																																																																
30-31		34-35		38-39																																																																																																																																																																																															
40-41		44-45		48-49																																																																																																																																																																																															
50-51		54-55		58-59																																																																																																																																																																																															
60-61		64-65		68-69																																																																																																																																																																																															
	82-83		86-87																																																																																																																																																																																																
	92-93		96-97																																																																																																																																																																																																
	2-3		6-7																																																																																																																																																																																																
	12-13		16-17																																																																																																																																																																																																
20-21	22-23	24-25	26-27	28-29																																																																																																																																																																																															
30-31		34-35		38-39																																																																																																																																																																																															
40-41		44-45		48-49																																																																																																																																																																																															
50-51		54-55		58-59																																																																																																																																																																																															
60-61		64-65		68-69																																																																																																																																																																																															
70-71	72-73	74-75	76-77	78-79																																																																																																																																																																																															
	82-83		86-87																																																																																																																																																																																																
	92-93		96-97																																																																																																																																																																																																
0-1		4-5		8-9																																																																																																																																																																																															
10-11		14-15		18-19																																																																																																																																																																																															
	32-33		36-37																																																																																																																																																																																																
	42-43		46-47																																																																																																																																																																																																
	52-53		56-57																																																																																																																																																																																																
	62-63		66-67																																																																																																																																																																																																
80-81		84-85		88-89																																																																																																																																																																																															
90-91		94-95		98-99																																																																																																																																																																																															
18 couples <i>N</i> 12 couples <i>Z</i> ratio 3/2	← ratio 3/2 →	12 couples <i>N</i> 8 couples <i>Z</i> ratio 3/2	18 couples <i>N</i> 12 couples <i>Z</i> ratio 3/2	← ratio 3/2 →	12 couples <i>N</i> 8 couples <i>Z</i> ratio 3/2																																																																																																																																																																																														

Fig. 63 Distribution des couples de configuration *N* (*e-e e-m m-u u-c c-c*) et de configuration *Z* (*u-u u-e e-c c-m m-m*) dans des sous matrices symétriques de 30 contre 20 couples de nombres adjacents.

### 11.3 Interactions des vingt fondamentaux

Pour clôturer cette série d'investigations sur les nombres entiers naturels et leurs interactions dépendantes de leur diverses natures, l'attention est ici faite sur les vingt premiers de ceux-ci nommés (voir chapitre 2) *les vingt fondamentaux*. Selon l'interaction de couples de fondamentaux pouvant être adjacents, sub-adjacents ou distants, ceux-ci s'opposent toujours en ratios de valeur 3/2 avec 6 couples contre 4 couples de différentes configurations considérées.

#### 11.3.1 Interactions des nombres ultimes et non ultimes

Considérant le double critère d'ultimité ou de non ultimité, l'opposition, figure 64, des couples composés de deux ultimes ou de deux non ultimes aux couples mixtes (un ultime + un non ultime) génère, tant dans les configurations de couples adjacents que sub-adjacents ou distants, toujours et dans un ratio de valeur 3/2 des ensembles de 6 contre 4 couples.

	Les vingt fondamentaux :											
10 couples adjacents	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	6 couples mixtes	← ratio 3/2
	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	4 couples purs	
10 couples sub-adjacents	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	6 couples purs	← ratio 3/2
	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	4 couples mixtes	
10 couples distants	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	6 couples mixtes	← ratio 3/2
	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	4 couples purs	

Fig. 64 Distinction des couples purs (composés de 2 ultimes ou de 2 non ultimes) et des couples mixtes (composés d'un seul ultime et d'un seul non ultime).

### 11.3.2 Interactions des nombres extrêmes et médians

Considérant le double critère de nombre extrêmes ou médians, figure 65, l'opposition, des couples composés de deux extrêmes ou de deux médians aux couples mixtes (un extrême + un médian) génère, tant dans les configurations de couples adjacents que sub-adjacents ou distants, toujours dans un ratio de valeur 3/2 des ensembles de 6 contre 4 couples.

		Les vingt fondamentaux :											
10 couples adjacents		0 1	2 3	4 5	6 7	8 9	6 couples purs	← ratio 3/2					
		10 11	12 13	14 15	16 17	18 19	4 couples mixtes						
10 couples sub-adjacents		0 1	2 3	4 5	6 7	8 9	6 couples purs	← ratio 3/2					
		10 11	12 13	14 15	16 17	18 19	4 couples mixtes						
10 couples distants		0 1	2 3	4 5	6 7	8 9	6 couples purs	← ratio 3/2					
		19 18	17 16	15 14	13 12	11 10	4 couples mixtes						

Fig. 65 Distinction des couples purs (composés de 2 extrêmes ou de 2 médians) et des couples mixtes (composés d'un seul extrême et d'un seul médian).

### 11.3.3 Interactions des couples de nombres de configurations N et Z

Considérant le double critère de couples de nombres de configuration N ou de configuration Z, l'opposition, figure 66, des couples de configuration N aux couples de configuration Z génère, tant dans les configurations de couples adjacents que sub-adjacents ou distants, toujours dans un ratio de valeur 3/2 des ensembles de 6 contre 4 couples.

		Les vingt fondamentaux :											
10 couples adjacents		0 1	2 3	4 5	6 7	8 9	6 couples N	← ratio 3/2					
		10 11	12 13	14 15	16 17	18 19	4 couples Z						
10 couples sub-adjacents		0 1	2 3	4 5	6 7	8 9	6 couples Z	← ratio 3/2					
		10 11	12 13	14 15	16 17	18 19	4 couples N						
10 couples distants		0 1	2 3	4 5	6 7	8 9	6 couples Z	← ratio 3/2					
		19 18	17 16	15 14	13 12	11 10	4 couples N						

Fig. 66 Distinction des couples de configuration N (e-e e-m m-u u-c c-c) et de configuration Z (u-u u-e e-c c-m m-m). (Voir figure 60)

### 11.4 Matrice des vingt fondamentaux et classes de nombres

Une nouvelle fois, est faite ici la démonstration indéniable de toute la haute importance de l'organisation des interactions des vingt nombres fondamentaux dont la notion a été introduite chapitre 2.

La matrice d'addition des dix premiers ultimes avec les dix premiers nombres non ultimes génère cent valeurs pouvant être distinguées selon les quatre classes de nombres définies chapitre 8. Comme le démontre la figure 64, dans cette matrice d'addition des vingt fondamentaux, les classes de nombres s'opposent deux à deux en ratios de valeur 3/2 ou de valeur 1/1 selon les configurations considérées.

	<b>+ 4 6 8 9 10 12 14 15 16 18</b>	<i>les 10 premiers non ultimes</i>
<b>0</b>	4 6 8 9 10 12 14 15 16 18	
<b>1</b>	5 7 9 10 11 13 15 16 17 19	
<b>2</b>	6 8 10 11 12 14 16 17 18 20	
<b>3</b>	7 9 11 12 13 15 17 18 19 21	
<i>les 10 premiers ultimes</i>	<b>5</b> 9 11 13 14 15 17 19 20 21 23	
<b>7</b>	11 13 15 16 17 19 21 22 23 25	
<b>11</b>	15 17 19 20 21 23 25 26 27 29	
<b>13</b>	17 19 21 22 23 25 27 28 29 31	
<b>17</b>	21 23 25 26 27 29 31 32 33 35	
<b>19</b>	23 25 27 28 29 31 33 34 35 37	

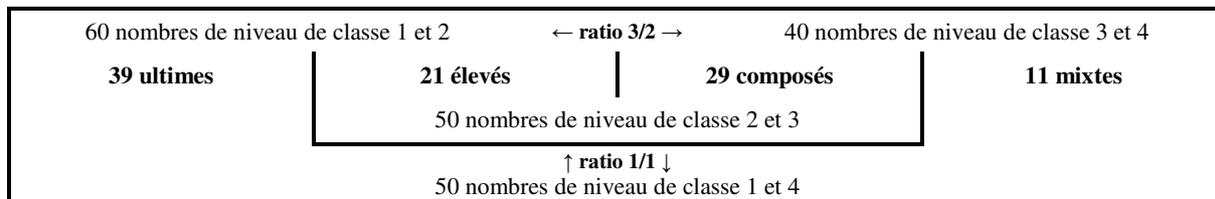


Fig. 67 Distribution des 4 classes de nombres générés depuis la matrice des additions des 20 fondamentaux ségrégés en 10 ultimes contre 10 non ultimes. (Voir aussi fig. 37 et 47).

Ainsi, l'opposition des classes extrêmes aux classes médianes s'organise en un ratio de 1/1 et l'opposition des deux premières classes de 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> niveau de complexité aux deux dernières classes de 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> niveau de complexité s'organise en un ratio de valeur 3/2.

#### 11.4.1 Sous matrices de soixante contre 40 entités

Ces deux types d'oppositions génèrent des ensembles d'entités s'opposant en ratios transcendants de valeur 3/2 ou/et de valeurs 1/1 dans les deux doubles configurations de quatre sous matrices de 60 contre 40 nombres telles qu'illustrées figure 68. Ces sous matrices s'inscrivent dans l'identité remarquable  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  où  $a$  et  $b$  ont les valeurs 3 et 2.

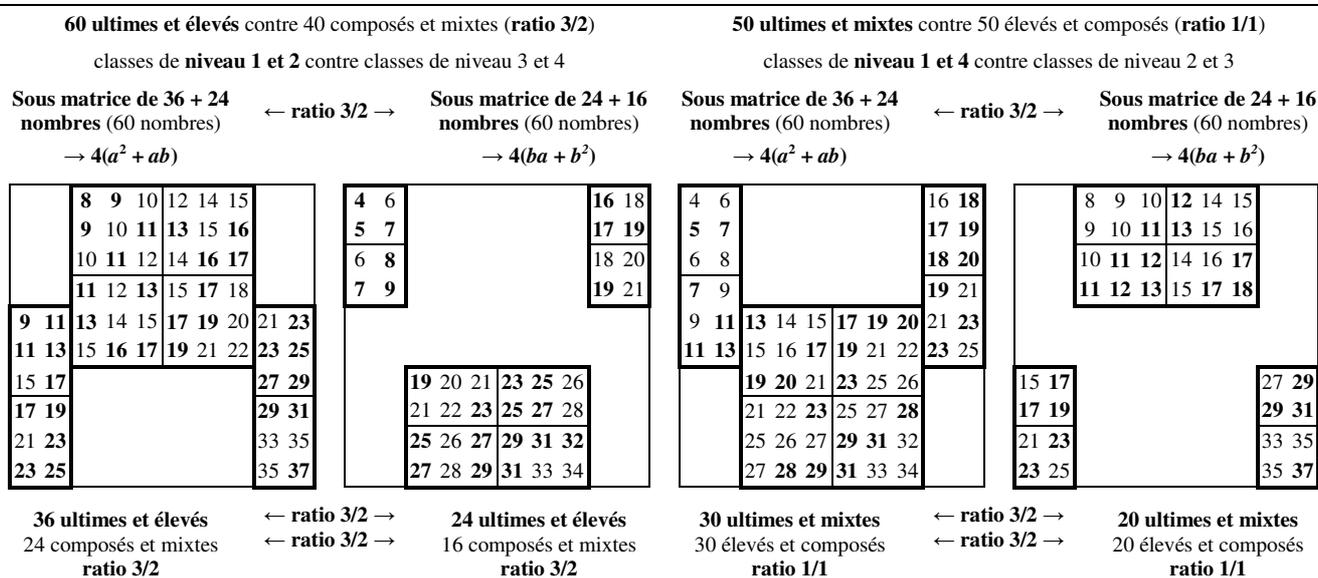


Fig. 68 Distribution des 4 classes de nombres générés depuis la matrice des additions des 20 fondamentaux (voir fig. 67). Sous matrices s'inscrivant dans l'identité remarquable  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

#### 11.4.2 Redéploiement de la matrice des vingt fondamentaux

Dans un redéploiement de cette matrice des additions des vingt fondamentaux (introduite figure 67) tel qu'illustré figure 69, il apparaît que l'opposition des nombres des deux premières classes de 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> niveau de complexité aux nombres des deux dernières classes de 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> niveau de complexité s'organise aussi en ratios transcendants de valeur 3/2. Cette matrice est de même configuration que celle introduite figure 31 au chapitre 7.1.

Matrice de 4 fois $(3^2 + (3 \times 2)) = 60$ nombres ( $\rightarrow$ 4 fois $(a^2 + ab)$ )																								
36 ultimes et élevés						$\leftarrow$ ratio 3/2 $\rightarrow$						24 composés et mixtes												
4	6	8	9	10	12	14	15	16	18	5	7	9	10	11	13	15	16	17	19	6	8	10	11	12
14	16	17	18	20	7	9	11	12	13	15	17	18	19	21	9	11	13	14	15	17	19	20	21	23
11	13	15	16	17	19	21	22	23	25	15	17	19	20	21	23	25	26	27	29	17	19	21	22	23
25	27	28	29	31	21	23	25	26	27	29	31	32	33	35	23	25	27	28	29	31	33	34	35	37
24 ultimes et élevés						$\leftarrow$ ratio 3/2 $\rightarrow$						16 composés et mixtes												
Matrice de 4 fois $(2^2 + (2 \times 3)) = 40$ nombres ( $\rightarrow$ 4 fois $(b^2 + ba)$ )																								

Fig. 69 Redéploiement de la matrice (voir fig. 67) d'addition des vingt fondamentaux s'inscrivant dans l'identité remarquable  $(a+b...)$ . Distribution des classes de nombres en ensembles s'opposant en ratios 3/2 transcendants dans deux sous matrices intriquées de 60 contre 40 entités.

Dans un autre redéploiement de cette matrice des additions des vingt fondamentaux (introduite figure 67) tel qu'illustré figure 70, il apparaît que l'opposition des nombres de classes extrêmes aux nombres de classes médianes s'organise en ratios de valeur 1/1 à l'intérieur des deux sous matrices de 60 et 40 entités et en ratios de valeur 3/2 transversalement à ces deux sous matrices.

Matrice de 4 fois $(3^2 + (3 \times 2)) = 60$ nombres ( $\rightarrow$ 4 fois $(a^2 + ab)$ )																								
30 ultimes et mixtes						$\leftarrow$ ratio 1/1 $\rightarrow$						30 élevés et composés												
4	6	8	9	10	12	14	15	16	18	5	7	9	10	11	13	15	16	17	19	6	8	10	11	12
14	16	17	18	20	7	9	11	12	13	15	17	18	19	21	9	11	13	14	15	17	19	20	21	23
11	13	15	16	17	19	21	22	23	25	15	17	19	20	21	23	25	26	27	29	17	19	21	22	23
25	27	28	29	31	21	23	25	26	27	29	31	32	33	35	23	25	27	28	29	31	33	34	35	37
20 ultimes et mixtes						$\leftarrow$ ratio 1/1 $\rightarrow$						20 élevés et composés												
Matrice de 4 fois $(2^2 + (2 \times 3)) = 40$ nombres ( $\rightarrow$ 4 fois $(b^2 + ba)$ )																								

Fig. 70 Redéploiement de la matrice (voir fig. 67) d'addition des vingt fondamentaux s'inscrivant dans l'identité remarquable  $(a+b...)$ . Egale distribution des ultimes et mixtes et des élevés et composés dans deux sous matrices intriquées de 60 contre 40 entités et opposition en ratios de valeur 3/2 transversalement à ces deux sous matrices.

## 12 Les nombres ultimes de Sophie Germain

Ici est appliqué aux nombres ultimes ( $u$ ) le concept de nombres premiers sûrs et de nombres de Sophie Germain. Pour rappel, si  $p$  et  $2p + 1$  sont tous deux premiers, alors  $p$  est un nombre premier de Sophie Germain et  $2p + 1$  est un nombre premier sûr.

### 12.1 Concept de nombre ultime sûr

Ainsi nous pouvons convenir que si  $u$  et  $2u + 1$  sont ultimes, alors  $u$  est un **nombre ultime de Sophie Germain** et  $2u + 1$  un **nombre ultime sûr**.

De cette convention, il découle que les deux nombres particuliers zéro (0) et un (1), reconnus comme ultimes depuis la définition de ce type de nombre (définition introduite chapitre 2.1), sont tout deux nombres ultimes de Sophie Germain :

$$0 \text{ et } [(2 \times 0) + 1] \text{ sont tous deux ultimes } \rightarrow 0 \text{ est ultime de Sophie Germain}$$

$$1 \text{ et } [(2 \times 1) + 1] \text{ sont tous deux ultimes } \rightarrow 1 \text{ est ultime de Sophie Germain}$$

### 12.2 Concept de nombre non ultime sûr

Aussi nous pouvons étendre ce concept de *sûreté* aux nombres non ultimes ( $\#$ ) et convenir que si  $\#$  et  $2\# + 1$  sont non ultimes, alors  $\#$  est un nombre non ultime de Sophie Germain et  $2\# + 1$  un **nombre non ultime sûr**.

### 12.3 Concept de nombre fertile

Ainsi, selon ces nouvelles conventions et le degré d'ultimité des nombres entiers naturels ceux-ci ne peuvent appartenir qu'à un seul de quatre différents types de nombres dont deux types de *nombres de Sophie Germain* (pouvant être ultimes ou non ultimes) et deux types de *non nombres de Sophie Germain* (pouvant être ultimes ou non ultimes). Nous proposons ici de qualifier ces nombres de Sophie Germain de *fertiles* et ces non nombres de Sophie Germain de *stériles*. Un nombre entier naturel est donc :

- soit un ultime ( $u$ ) fertile :  $2u + 1 = u' \rightarrow u$  est ultime fertile,  $u'$  est ultime sûr\*,
- soit un ultime ( $u$ ) stérile :  $2u + 1 = \# \rightarrow u$  est ultime stérile,  $\#$  est non ultime non sûr\*,
- soit un non ultime ( $\#$ ) fertile :  $2\# + 1 = \#' \rightarrow \#$  est non ultime fertile,  $\#'$  est non ultime sûr\*,
- soit un non ultime ( $\#$ ) stérile :  $2\# + 1 = u \rightarrow \#$  est non ultime stérile,  $u$  est ultime non sûr\*.

Aussi est-il convenu que l'appellation "fertiles" désigne les nombres fertiles (qui peuvent être des ultimes ou des non ultimes) et l'appellation "stériles" désigne les nombres stériles (qui peuvent être des ultimes ou des non ultimes).

\*En conclusion de cet article, un terme plus approprié sera proposé pour qualifier la sûreté ou non sûreté de ces nombres.

### 12.4 Intrication de sûreté

Il s'avère que parmi les vingt nombres fondamentaux (notion introduite chapitre 2.5), qui sont simultanément les 20 premiers nombres mais aussi les 10 premiers ultimes et les dix premiers non ultimes, se trouvent 50% de nombres fertiles dont, dans un ratio de valeur 3/2, 6 ultimes fertiles contre 4 non ultimes fertiles. Comme illustré en partie haute de la figure 71, de nombreux ratios transcendants de valeur 3/2 (ou 2/3) opèrent ainsi selon les différentes natures des entités constituant cet ensemble des vingt nombres fondamentaux.

Aussi (partie basse de la figure 71), le groupe de vingt autres nombres constitué des 10 ultimes et des 10 non ultimes directement suivants des entités du précédent groupe des vingt fondamentaux s'organise en ratios exactement inverses selon les mêmes natures considérées : ultimes fertiles ou stériles, non ultimes fertiles ou stériles. Ceci est d'autant plus remarquable puisque, différemment du premiers groupe des vingt fondamentaux constitué des 20 premiers nombres (de 0 à 19), ce dernier groupe n'est pas constitué des vingt nombres suivants (de 20 à 40) mais juste des 10 ultimes et des 10 non ultimes suivants.

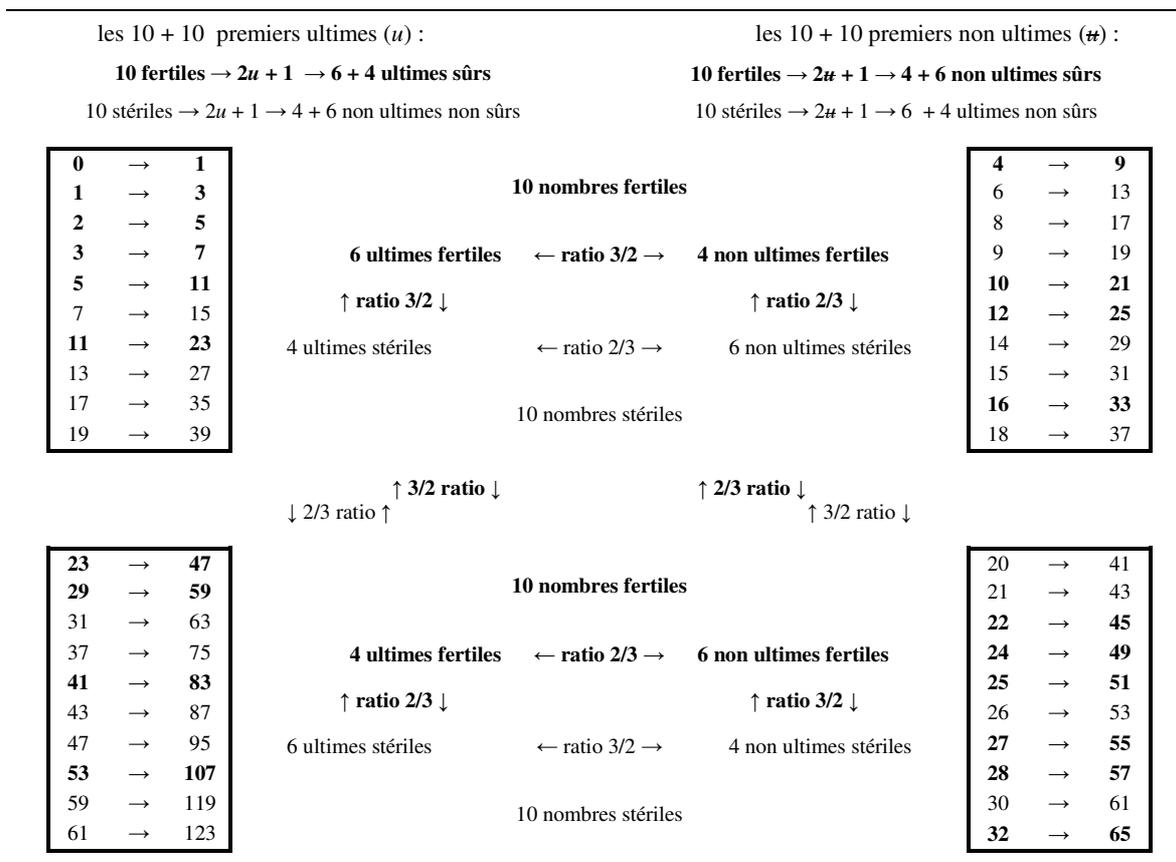


Fig. 71 Intrication de sûreté (de Sophie Germain) des deux fois 10 premiers ultimes et deux fois 10 premiers non ultimes. (Voir aussi Fig. 72)

Ainsi, selon le concept de sûreté de Sophie Germain appliqué ici tant aux nombres ultimes qu'aux nombres non ultimes, nous pouvons observer une très forte intrication entre les quatre doubles groupes de nombres entiers naturels constitués des deux fois 10 premiers ultimes et des deux fois 10 premiers non ultimes et, transversalement, des deux fois 10 premiers ultimes fertiles ou stériles et des deux fois 10 premiers non ultimes fertiles ou stériles.

La figure 72, complémentaire de la précédente, illustre sous un autre angle cette intrication de sûreté des 20 premiers ultimes et 20 premiers non ultimes.

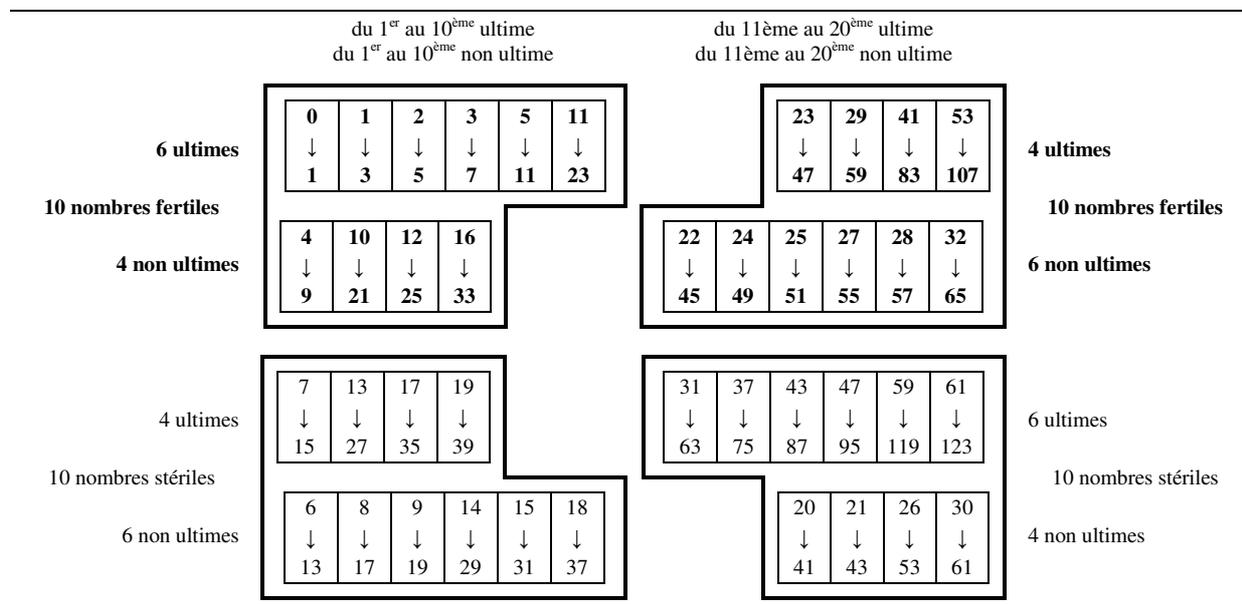


Fig. 72 Intrication de sûreté (de Sophie Germain) des deux fois 10 premiers ultimes et deux fois 10 premiers non ultimes. (Voir aussi Fig. 71)

### 12.5 Fertilité des cent premiers nombres

Dans cet article investissant les nombres entiers naturels, de nombreuses démonstrations arithmétiques ont été faites à l'intérieur de la matrice des cent premiers nombres. La dernière démonstration qui suit, à la fois clos celui-ci, mais aussi peut être comme l'introduction d'un autre article encore à publier. Il se trouve en effet que la distribution des nombres fertiles et non fertiles (pouvant pour rappel être aussi bien des ultimes que des non ultimes, comme spécifié chapitre 12.3) n'est nullement aléatoire dans cette matrice des cent premiers nombres. De nombreux arrangements de même nature que beaucoup de ceux déjà introduits dans différents chapitres de cette étude génèrent des oppositions d'entités en différents ratios de valeur 3/2 ou 1/1 selon que ces nombres soient qualifiés de fertiles ou de stériles.

Voici juste ici, présenté figure 73, en conclusion de cet article, et sans commentaires, un exemple de ces arrangements remarquables démontrant et confirmant le caractère non aléatoire des concepts de fertilité et de stérilité (et donc aussi des concepts d'ultimité et de non ultimité) des nombres entiers naturels tel que précédemment définis chapitre 12.3.

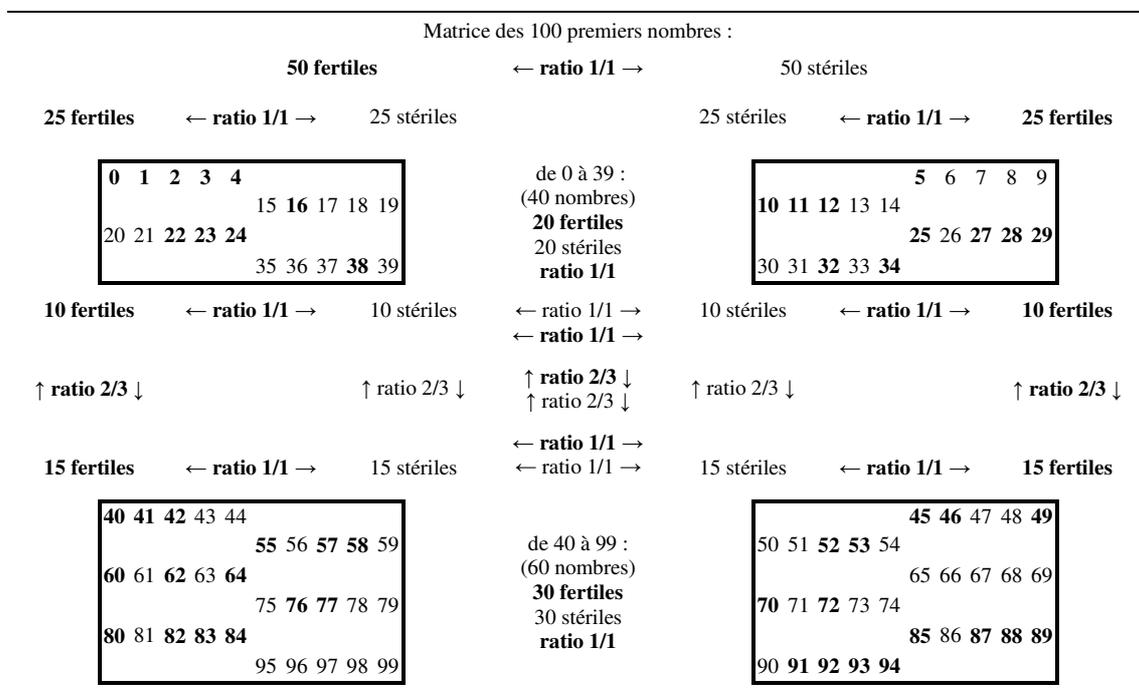


Fig. 73 Distribution des 50 nombres fertiles et des 50 nombres stériles dans des sous matrices issues de la matrice des 100 premiers nombres.

## 13 Discussions et Conclusions

Dans un souci de clarification des phénomènes introduits, le très grand nombre de nouveaux concepts proposés dans cet article investissant les nombres entiers naturels oblige la fusion des discussions et conclusions. Aussi, toujours par ce besoin d'en clarifier instantanément la portée, certaines discussions sont déjà présentes dans plusieurs démonstrations.

### 13.1 Définition des ultimes

Jusqu'à présent, la définition des nombres dits *premiers* ne permettait pas d'inclure les nombres zéro (0) et un (1) à cet ensemble de premiers. Ainsi, l'ensemble des nombres entiers naturels était éparpillé en quatre entités : les nombres premiers, les non premiers, mais aussi les ambigus nombres *zéro* et *un* aux caractéristiques arithmétiques exotiques. La double définition de nombres ultimes et de non ultimes proposé ici permet de bien scinder l'ensemble des nombres entiers naturels en deux groupes de nombres aux caractéristiques bien définies et absolues : un nombre est soit ultime soit non ultime. En plus de sa non trivialité, le fait de préciser la nature numériquement inférieure d'un diviseur à tout nombre envisagé permet effectivement qu'il n'y ait pas de différence de statut entre les nombres ultimes zéro (0) et un (1) et n'importe quel autre nombre qualifié d'ultime.

### 13.2 Concept de diviseur ultime et d'algèbre ultime

L'attention portée sur les diviseurs ultimes démontre que ceux-ci s'organisent non aléatoirement, notamment au sein de la matrice des cent premiers nombres où l'on en dénombre  $5x$  (15) différents mais aussi  $5x'$  (210) au total qui composent les non ultimes dans cette matrice de  $5x$  par  $5x$  (10 par 10) entités. L'arrangement de leur première apparition est elle-même non aléatoire au sein de cette matrice et s'organise aussi en ratios de valeur  $3/2$  dans les mêmes configurations que la totalité des diviseurs ultimes des cent premiers nombres.

Aussi et ainsi, la notion de diviseur ultime est indissociable de celle de nombre ultime. Bien qu'inférieurs à n'importe quels autres nombres, zéro (0) et un (1) n'en divisent aucuns : la division par zéro n'est pas définie et un (1) ne divise pas un nombre : il ne le divise pas en diviseurs plus petits. Dans l'algèbre ultime, zéro (0) et un (1) n'en multiplient aucun non plus. Par exemple, les composés absolus  $7 \times 0$  ou  $7 \times 1$  n'existent pas en algèbre ultime :  $7 \times 0$  se réduit à 0 (nombre ultime) et  $7 \times 1$  se réduit à 7 (autre nombre ultime).

### 13.3 Les quatre classes de nombres

Le concept et la définition de nombre ultime (mais aussi ceux de diviseur ultime) permettent le classement de l'ensemble de nombres entiers naturels en quatre classes d'entités aux propriétés à la fois interactives, uniques et de degré progressif (depuis la classe des ultimes) de complexité. Aussi, tout nombre entier naturel ne peut appartenir qu'à l'une de ces quatre classes et simultanément appartient obligatoirement à l'une de ces quatre classes : nombres ultimes, élevés, composés ou mixtes.

Cette quantité de classes, de valeur quatre, permet de former dix différentes combinaisons de deux nombres. Ce qui relie ce nombre de classes au système décimal car de plus, 5 contre 5 combinaisons (qualifiées de configurations  $N$  et de  $Z$ ) génèrent deux ensembles de 30 contre 20 couples dans la matrice des 100 (soit 10 fois 10) premiers nombres.

### 13.4 Le ratio 3/2 et le système décimal

Ratio  $3/2$ , ce terme apparaît des centaines de fois dans cet article ! Il est toujours impliqué entre et dans des ensembles d'entités de  $5x$  grandeurs (soit  $3x + 2x$ ) dont, dans la majorité des situations, des matrices diverses de dix par dix entités. Ces phénomènes arithmétiques démontrent l'égalité d'importance des différents types d'entités étudiées comme les ultimes ou non ultimes, les primordiaux ou non primordiaux, les chiffres nombres ou non chiffres nombres parmi les fondamentaux, les nombres de classes extrêmes et ceux de classes médianes, les fertiles, les stériles, etc. . Ainsi est révélé dans cet article de multiples dualités distinguant les nombres entiers naturels en toujours des paires de sous ensembles s'opposant en variés ratios d'exacte valeur  $3/2$  ou, plus accessoirement, d'exacte valeur  $1/1$ .

Aussi, beaucoup des phénomènes présentés, en plus d'impliquer ce ratio arithmétique de  $3/2$ , gravitent autour de l'identité remarquable  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  où  $a$  et  $b$  ont les valeurs 3 et 2. Ceci génère de nombreuses intrications dans les arrangements arithmétiques opérant entre les différentes entités considérées et renforce donc leur crédibilités par l'amplification dimensionnelle de ces phénomènes arithmétiques.

Les dix premiers ceci, les dix premiers cela, en effet c'est bien à la source de différentes suites d'entités que ce manifestent ces nombreux arrangements de  $3x$  contre  $2x$  grandeurs et non plus loin en aval de ces suites. Tout ceci démontre des liens intimes entre les différentes natures, introduites dans cette étude, des nombres entiers naturels et le système décimal.

### 13.5 Diversités des champs d'investigation

Les phénomènes révélés dans cette étude des nombres entiers naturels investissent soit séparément soit de manière transcendante différentes notions mathématiques. Ces démonstrations, décrivant des oppositions d'entités en toujours des

ratios de valeur  $3/2$  ou  $1/1$ , impliquent par exemple simultanément des suites de Fibonacci et des triangles de Pascal. Aussi beaucoup de phénomènes opèrent à l'intérieur de variées matrices aux configurations exotiques mais géographiquement symétriques. Aussi, le fait de pouvoir, avec aisance, poursuivre ces investigations dans le domaine de notion de nombre de Sophie Germain, où les concepts d'ultimité et de non ultimité peuvent être enrichis, conforte la véracité de ces derniers concepts sujets principaux de cet article.

### 13.6 Concept de nombre de Sophie Germain

Concernant le concept de nombre de Sophie Germain, en référence à la génétique, il a été introduit ceux de nombres fertiles et de nombres stériles générant des nombres sûrs ou incertains. Aussi nous proposons, dans cette logique génétique, de remplacer les termes de nombre sûr et d'incertain par *nombre pur* et *nombre hybride* pouvant s'appliquer tant aux ultimes qu'aux non ultimes tel qu'explicité chapitre 12. Ainsi peut-on dire qu'un nombre fertile *engendre* (par la fonction de Sophie Germain :  $2x + 1$ ) un nombre pur et qu'un nombre stérile engendre un nombre hybride. Par cette même logique, et bien que tout nombre puisse être fertile ou stérile, certains, par l'irréversibilité de la fonction (nombres pairs) ne peuvent être ni purs ni hybrides mais *orphelins*.

### 13.7 Les fondamentaux

La mise en valeur des vingt premiers nombres qualifiés de fondamentaux trouve toute sa légitimité par l'intrication quasi quantique des composants de ce groupe particulier de nombres. Formé des dix premiers ultimes et des dix premiers non ultimes mais aussi des dix chiffres nombres et des dix premiers non chiffres nombres, cet ensemble est un espace mathématique où et d'où s'observe un grand nombre des phénomènes introduits dans cet article depuis la simple matrice d'addition de ses composants jusqu'aux intrications liées au concept de nombres de Sophie Germain.

### 13.8 Pour conclure

Depuis les variées illustrations arithmétiques introduites en cet article, nous proposons légitimement un double nouveau concept mathématique classant les nombres entiers naturels en deux ensembles d'entités aux propriétés distinctes bien définies :

- les ultimes, n'admettant aucun diviseur leur étant inférieur,
- les non ultimes admettant au moins un diviseur leur étant inférieur.

Aussi, depuis cette double définition, nous proposons de sous-classifier les nombres entiers naturels en ultimes, élevés, composés et mixtes.

Enfin nous proposons d'enrichir les notions de nombres de Sophie Germain (premiers, sûrs) de ce double nouveau concept d'ultimité et de non ultimité.