EXERCICE 1 : *(NOUVELLES FONCTIONS)*

Les fonctions *ch* (cosinus hyperbolique) et *sh* (cosinus hyperbolique) sont définies sur ℝ par :

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Etudier la parité de ces deux fonctions.
2. Etablir le tableau de signes de ces deux fonctions.
3. Calculer $ch'(x)$ et $sh'(x)$
   Quel lien y-a-t-il entre $ch'(x)$, $sh'(x)$, $ch(x)$ et $sh(x)$?
4. Etudier les limites de $ch(x)$ et $sh(x)$ en $+\infty$ et leurs variations.
5. Montrer que les courbes C_{ch} et C_{sh} sont asymptotes l'une de l'autre au voisinage de $+\infty$.
   Etudier les positions relatives de ces deux courbes.
6. Montrer que pour tous réels x et y, on a :
   a) $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$
   b) $sh(x + y) = ch(x)\times sh(y) + sh(x)\times ch(y)$
   c) $sh(2x) = 2\times ch(x)\times sh(x)$
   d) $ch(2x) = 2\times ch^2(x) - 1$
7. Retrouver la relation 6.*a*) en utilisant la dérivée de la fonction $f(x) = ch^2(x) - sh^2(x)$
8. En utilisant la relation 6.*c*) , montrer que $ch(2x) = ch^2(x) + sh^2(x)$

EXERCICE 2 : *(ENCORE UNE NOUVELLE FONCTION)*

La fonction *tanh* (tangente hyperbolique) est définie sur ℝ par :

$$\tanh(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1. Exprimer $tanh'(x)$
2. Etudier les limites de $tanh(x)$ aux bornes de son domaine de définition.
3. Etablir son tableau de variation.

EXERCICE 3 : *(INTEGRE)*

Soit $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ et $I_2 = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$

1. Donner la valeur exacte de I_1
2. Donner la valeur exacte de $I_1 + I_2$
3. Comparer x, x^2 et x^3 si $x \in [0 ; 1]$
4. En déduire un encadrement de $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$
5. *a*) Déterminer deux réels A et B tels que :
   $$\frac{x^2}{1+x^2} = A + \frac{B}{1+x^2}$$
   b) En déduire la valeur exacte de $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$
   c) En déduire un encadrement de $\frac{\pi}{4}$ à 10^{-3} près.

Vous devez apporter le plus grand soin à la rédaction de votre copie.