TS CORRECTION

Exercice 1 **15 min** **6 POINTS**

Calculer les dérivées des fonctions composées suivantes (Toutes sont définies sur IR) :

F(x) = e^{-3x^2+x}

F est de la forme $e^{u(x)}$. Elle est dérivable sur IR comme fonction composée et sa dérivée est u'(x) $e^{u(x)}$.

F ' (x) = (-3. 2x + 1) e^{-3x^2+x}

G(t) = cos(t e^{-t})   G est de la forme cos (u(t)).

Elle est dérivable sur IR comme fonction composée et sa dérivée est - u'(t) sin (u(t)).

Ici u(t) = t e^{-t} et Elle est dérivable sur IR comme le produit de deux fonctions.

Sa dérivée est u ' (t) = 1. e^{-t} + t (-e^{-t}) = (1 – t) e^{-t}

G'(t) = - (1 – t) e^{-t} . sin(t e^{-t}) = (t – 1) e^{-t} . sin(t e^{-t})

H(x) = $e^{-e^{2x}}$ (l'exponentielle de « – exponentielle de 2x »)

H est de la forme $e^{u(x)}$. Elle est dérivable sur IR comme fonction composée et sa dérivée est u'(x) $e^{u(x)}$.

Ici, u(x) = - e^{2x} qui est dérivable sur IR et sa dérivée est u'(x) = - 2e^{2x}.

H(x) = - 2 e^{2x}. $e^{-e^{2x}}$ = -2 $e^{2x-e^{2x}}$

Exercice 2 **10 min** **3 POINTS**

Déterminer l'écriture exponentielle des complexes suivants : $z_1 = i$ $z_2 = e^{-i\theta}$ $z_3 = 2 + i$

$z_1 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

~~$z_2 = e^{-i\theta}$~~ Annulé car erreur de consigne.

$z_3 = 2 + i$

MODULE de z_3: $|z_3| = |2+i| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

ARGUMENT de z_3 :

$\cos(\arg(z_3)) = \frac{x}{\lvert z_3\rvert} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\sin(\arg(z_3)) = \frac{y}{\lvert z_3\rvert} = \frac{1}{\sqrt{5}}$	Ce ne sont pas des valeurs de références. Utilisons la calculatrice pour déterminer une mesure en radian de cet argument. $\text{Cos}^{-1}(\frac{2}{\sqrt{5}}) = 0{,}46$ (de même $\text{Sin}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{5}}) = 0{,}46$) On obtient : $\arg(z_3) = 0{,}46$ rad

Exercice 3 **10 min** **5 POINTS**

Soit le nombre complexe $\boldsymbol{\omega} = e^{2i\frac{\pi}{5}}$.

1) Déterminer une notation exponentielle et trigonométrique de $\frac{1}{\omega}$ et de $\overline{\omega}$. Qu'en déduire ?

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{e^{2i\frac{\pi}{5}}} = e^{-2i\frac{\pi}{5}} = \cos(-\frac{2\pi}{5}) + i\sin(-\frac{2\pi}{5}) = \cos(\frac{2\pi}{5}) - i\sin(\frac{2\pi}{5})$$

$$\overline{\omega} = \cos(\frac{2\pi}{5}) - i\sin(\frac{2\pi}{5})$$

Donc $\frac{1}{\omega} = \overline{\omega}$.

2) Calculer la forme algébrique de $\boldsymbol{\omega}^5$.

$$\boldsymbol{\omega}^5 = \left(e^{2i\frac{\pi}{5}}\right)^5 = e^{2\times 5\times i\frac{\pi}{5}} = e^{2i\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1 + i0 = 1$$

3) Vérifier que $\boldsymbol{\omega}^4 = \overline{\omega}$ et $\boldsymbol{\omega}^3 = \overline{\omega}^2$.

$$\boldsymbol{\omega}^5 = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega}^4 . \boldsymbol{\omega} = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega}^4 = \frac{1}{\omega} = \overline{\omega} \qquad \boldsymbol{\omega}^5 = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega}^3 . \boldsymbol{\omega}^2 = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega}^3 = \frac{1}{\omega^2} = \overline{\omega^2}$$

Exercice 4 **15 min** **8 POINTS**

On note $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ $\quad z_2 = 2 - 2i$ $\quad Z = \dfrac{z_1}{z_2}$

1) Ecrire $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique.

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2-2i} = \frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} = \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}+i(2\sqrt{2}+2\sqrt{6})}{2^2+2^2} = \frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{6}+i(\sqrt{2}+\sqrt{6}))}{8} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+i(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}$$

2) A - Déterminer une écriture exponentielle de z_1 et de z_2.

$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$

MODULE : $|z_1| = |\sqrt{2}+i\sqrt{6}| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

ARGUMENT : cos (arg(z_3)) = $\dfrac{x}{|z_1|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$ D'où arg(z_1) = π/3 rad

sin (arg(z_3)) = $\dfrac{y}{|z_1|} = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$$
$$z_1 = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$z_2 = 2 - 2i$

MODULE : $|z_2| = |2-2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

ARGUMENT : cos (arg(z_3)) = $\dfrac{x}{|z_1|} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ D'où arg(z_2) = -π/4 rad

sin (arg(z_3)) = $\dfrac{y}{|z_1|} = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$z_2 = 2 - 2i$$
$$z_2 = 2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

B- En déduire une écriture exponentielle de Z.

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

3) Déterminer alors les valeurs de cos $\dfrac{7\pi}{12}$ et sin $\dfrac{7\pi}{12}$.

$Z = e^{i\frac{7\pi}{12}} = \cos\dfrac{7\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ D'où cos $\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et sin $\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

4) Ecrire sous forme exponentielle puis trigonométrique puis algébrique Z^{2016}.

$$Z^{2016} = \left(e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{2016} = e^{i2016\frac{7\pi}{12}} = e^{i168\times 7\pi} = e^{i1176\pi} = e^{i588\times 2\pi} = e^{i2\pi} = 1$$

Exercice 5 **1h.**

1) Supposons connue la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ 3 POINTS

Et démontrons que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ ainsi que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$

2) Soit f la fonction définie sur [-1 ; +∞[par $f(x) = (1-x^2)e^{-x}$. 10 POINTS

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité graphique : 2cm/carreaux sur les deux axes)

a – Déterminer la limite en +∞ de f. Donner une interprétation graphique.

Lim

b – Calculer f ‘ la dérivée de f. Déterminer le signe de f ‘ (x) sur [-1 ; +∞[.

La fonction f est dérivable sur [-1 ; +∞[comme produit de fonctions dérivables sur [-1 ; +∞[.

Et on a : f =uv d'où f ‘ = u ‘ v + u v ‘

Ainsi $f'(x) = -2x\, e^{-x} + (1-x^2)(-e^{-x}) = -\, e^{-x}\,(2x + 1 - x^2)$

Le signe de f est l'opposé de celui du polynôme $-x^2 + 2x + 1$

c – En déduire le tableau des variations de f.

d- Déterminer une équation de T la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.

y =

Et une équation de d la tangente à $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse 1

y =

e – Construire la courbe $\mathscr{C}$, d, T dans un repè re orthonormé sur votre feuille. Placer aussi les tangente horizontale.

f – Démontrer que l'équation f(x) = ½ admet deux solutions sur [-1 ; +∞[.

Déterminer un ENCADREMENT au dixième des solutions de f(x) = ½.

g - On note α la solution positi ve et β la solution négaive. Montrer que $\alpha = \sqrt{\dfrac{2-e^{\alpha}}{2}}$.

Comme f (α) = 1