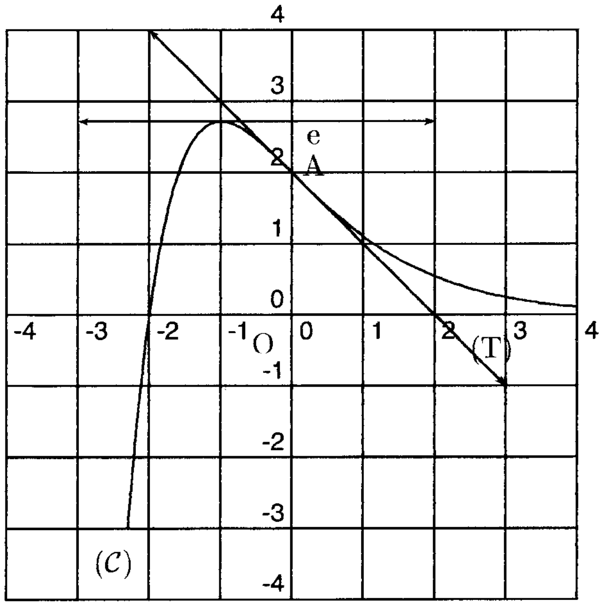
Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Sur le graphique ci-dessous la courbe (C) représente une fonction *f* définie et dérivable sur ℝ. La droite (T) est la tangente à la courbe (C) au point *A* d'abscisse 0.



1) À partir des informations portées sur le graphique, reproduire sur votre copie et compléter le tableau suivant :

x	– 1	0
f (x)		
f '(x)		

2) Résoudre graphiquement, dans ℝ, les équations ou inéquations suivantes:
   a. *f*(x) = 2 puis *f*(x) < 2.
   b. *f '*(x) = 0 puis *f '*(x) > 0.

Partie B

Soit la fonction numérique *f* définie sur ℝ par : $f(x) = (x + 2)\ e^{-x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de *f* . On ne demande pas de construire (C).

1) Déterminer la limite de f en –∞.
2) Déterminer la limite de f en +∞. Comment se traduit graphiquement ce résultat?
3) Établir que tout *x* réel , $f'(x) = -(x + 1)\ e^{-x}$. En déduire le signe de *f '(x)* puis le tableau de variation de la fonction *f*.
4) Démontrer que l'équation *f (x) = 2* a deux solutions distinctes sur l'intervalle [-2 , 4] et donner une valeur approchée à 10^{-2} près de celles-ci.
5) La fonction $g(x) = (-x - 3)e^{-x}$ est-elle une primitive de la fonction *f* ?

Correction

Partie A

1) On a :

x	-1	0
$f(x)$	e	2
$f'(x)$	0	-1

2) a. $f(x) = 2$: $S = \{-1{,}5 \,;0\}$
$f(x) < 2$: $S =]-\infty \,; -1{,}5[\cup]0 \,; +\infty[$
b. $f'(x) = 0$: $S = \{-1\}$
$f'(x) > 0$: $S =]-\infty \,; -1[$

Partie B

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x + 2)\,e^{-x}$.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc par produit, $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$.

2) On remarque que $f(x) = (x + 2)\,e^{-x} = \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{2}{e^x}$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$ donc par somme, $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.
On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote à (C) en $+\infty$.

3) $f'(x) = e^{-x} + (x + 2)(-e^{-x}) = (1 - x - 2)e^{-x} = -(x + 1)\,e^{-x}$.
Pour tout x, $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-(x + 1)$, soit négatif sur $[-1 \,; +\infty[$ et positif sur $]-\infty \,; -1]$. On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

4) Sur $[-2 \,; -1]$, la fonction f est continue et strictement croissante.
De plus, $f(-2) = 0 < 2$ et $f(-1) = e > 2$.

Donc, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[-2 \,; -1]$.
En utilisant les tables de valeurs de la calculatrice, on trouve $-1{,}59$.
Sur $[-1 \,; 4]$, la fonction f est continue et strictement décroissante.
$f(-1) = e > 2$ et $f(4) = 6e^{-4} < 2$

Donc, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[-1 \,; 4]$.
En utilisant les tables de valeurs de la calculatrice, on trouve 0.
Par suite, l'équation $f(x) = 2$ admet deux solutions distinctes sur l'intervalle $[-2 , 4]$ qui sont $-1{,}59$ et 0.

5) a. $g'(x) =$ $= (x + 2)e^{-x}$.

La fonction $g(x) = (-x - 3)e^{-x}$ est donc une primitive de la fonction f.