

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées.  
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.  
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n<sup>o</sup> 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

## CORRECTION

EXERCICE 1.<sup>1</sup>

1. ( $D_1$ ) droite de régression de  $Y$  en  $X$  ayant pour équation :  $y = ax + b$ , on a

$$a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x}$$

( $D_2$ ) droite de régression de  $X$  en  $Y$  ayant pour équation :  $x = a'y + b'$ , on a

$$a' = \frac{\text{cov}(Y, X)}{V(Y)} \text{ et } b' = \bar{x} - a'\bar{y}$$

$$\text{On en déduit que } aa' = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} \frac{\text{cov}(Y, X)}{V(Y)} = \frac{(\text{cov}(X, Y))^2}{V(X)V(Y)} = \left( \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \right)^2 \Rightarrow$$

$$aa' = r^2.$$

2. ( $D_1$ ) droite de régression de  $Y$  en  $X$  ayant pour équation réduite  $y = 2,4x$ , on a :  $a = 2,4$  et  $b = 0$

( $D_2$ ) droite de régression de  $X$  en  $Y$  ayant pour équation réduite :  $x = \frac{3,5}{9}y + \frac{24}{9}$ , on a ,

$$\text{on a : } a' = \frac{3,5}{9} \text{ et } b' = \frac{24}{9}.$$

D'après la question précédente, le coefficient de corrélation vérifie :

$$r^2 = aa' = 2,4 \frac{3,5}{9} = \frac{14}{15}.$$

Puisque  $r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ , que  $\sigma(X)$  et  $\sigma(Y)$  sont positifs par définition et que  $\text{cov}(X, Y)$

est positif par hypothèse, alors  $r$  est positif. Donc  $r = \sqrt{\frac{14}{15}}$

$$3. \text{ On a } \begin{cases} -a\bar{x} + \bar{y} = b & (1) \\ \bar{x} - a'\bar{y} = b' & (2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Je garde l'équation 1.} \\ \text{Je multiplie l'équation 2 par } a \\ \text{pour éliminer } \bar{x} \end{array} \quad \begin{cases} -a\bar{x} + \bar{y} = b \\ a\bar{x} - aa'\bar{y} = ab' \end{cases}$$

j'additionne membre à membre :  $(1 - aa')\bar{y} = b + ab'$  c'est à dire

$$\bar{y} = \frac{b + ab'}{1 - r^2}$$

1. pour voir d'autre corrections consulter <http://ipempt.education.sn>

Pour trouver  $\bar{x}$  j'utilise l'équation la plus simple ; ici c'est la 2 :  $\bar{x} = b' + a'\bar{y}$  c'est à dire

$$\bar{x} = b' + a' \frac{b + ab'}{1 - r^2} = \frac{b' - r^2 b' + a'b + a'ab'}{1 - r^2} \Rightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{b' + a'b}{1 - r^2}$$

Application numérique : Comme  $\frac{1}{1 - r^2} = 15$ , on a  $\bar{y} = 15 \times 2,4 \times \frac{24}{9}$  et  $\bar{x} = 15 \times \frac{24}{9}$   
Donc

$$\bar{y} = 96 \text{ et } \bar{x} = 40$$

**EXERCICE 2.**

1. ☒ Pour que  $M$  appartiennent à l'axe des abscisses, il faut et il suffit que la partie imaginaire de  $z$  soit nulle c'est à dire  $\ln y = 0$  ou  $y = 1$ . Donc  $p(A) = p(y = 0) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

☒ Pour que  $M$  appartiennent à l'axe des ordonnées, il faut et il suffit que la partie réelle de  $z$  soit nulle c'est à dire  $\ln x = 0$  ou  $x = 1$ . Donc  $p(B) = p(x = 0) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

☒ L'événement contraire de  $C$  est "  $M$  appartient à au moins un des axes" c'est à dire  $A \cup B$ .

L'événement  $A \cap B$  est "  $M$  appartient à chacun des axes" c'est à dire  $z = 0$  ou  $\ln x = 0$  et  $\ln y = 0$  finalement  $x = y = 1$ .

Puisque le tirage est avec remise, les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants, donc :

$$p(A \cap B) = p(A)p(B) = \frac{1}{9}.$$

Par conséquent :

$$p(\bar{C}) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

$$p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

☒ Pour que l'angle  $(\overrightarrow{OM}, \vec{i})$  soit égal à  $-\frac{\pi}{4}$  il faut et il suffit que les coordonnées de  $M$  soient égales et strictement positives c'est à dire  $\ln x = \ln y > 0$  ou  $x = y = e$ . Par conséquent,  $D$  est l'événement "  $x = y = e$ ".

$$p(x = e) = p(y = e) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \text{ et } p(D) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

☒ Pour que  $M$  appartienne au cercle trigonométrique, il faut et il suffit que  $OM = 1$  c'est à dire  $(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = 1$ . Puisque  $x$  et  $y$  ne prennent que les valeurs 1,  $e$  et  $\frac{1}{e}$ ,  $\ln x$  et  $\ln y$  ne prennent que les valeurs 0, 1 et  $-1$  ;

Les seuls couples possibles pour réaliser  $(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = 1$  sont donc

$$(\ln x, \ln y) = (1, 0), (-1, 0), (0, 1), \text{ ou } (0, -1)$$

$$\text{c'est à dire } (x, y) = (e, 1), \left(\frac{1}{e}, 1\right), (1, e), \text{ ou } \left(1, \frac{1}{e}\right).$$

$$\text{Or } p\left((x, y) = (e, 1)\right) = p\left((x, y) = (1, e)\right) = \frac{2}{12} \times \frac{4}{12} = \frac{1}{18}$$

$$p\left((x, y) = \left(\frac{1}{e}, 1\right)\right) = p\left((x, y) = \left(1, \frac{1}{e}\right)\right) = \frac{2}{12} \times \frac{4}{12} = \frac{1}{18}$$

$$\text{Donc } p(E) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{9}$$

2. a. Puisque  $x$  et  $y$  ne prennent que les valeurs 1,  $e$  et  $\frac{1}{e}$ ,  $\ln x$  et  $\ln y$  ne prennent que les valeurs 0, 1 et  $-1$ ; Les couples de coordonnées possibles sont donc :

$$(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (-1, -1)$$

correspondant aux valeurs suivantes du couples  $(x, y)$  :

$$(1, 1), (1, e), (1, \frac{1}{e}), (e, 1), (e, e), (e, \frac{1}{e}), (\frac{1}{e}, 1), (\frac{1}{e}, e), (\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$$

Les distances  $OM$  possibles sont donc : 0, 1,  $\sqrt{2}$ .

La variable aléatoire  $X$  prend les valeurs 0, 1,  $\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} p(X = 0) &= p((x, y) = (1, 1)) = \frac{4}{12} \frac{4}{12} = \frac{1}{9} \\ p(X = 1) &= p((x, y) = (1, e)) + p((x, y) = (e, 1)) \\ &\quad + p((x, y) = (1, \frac{1}{e})) + p((x, y) = (\frac{1}{e}, 1)) \\ &= \frac{2}{12} \times \frac{4}{12} + \frac{2}{12} \times \frac{4}{12} + \frac{4}{12} \times \frac{6}{12} + \frac{4}{12} \times \frac{6}{12} = \frac{4}{9} \\ p(X = \sqrt{2}) &= p((x, y) = (e, e)) + p((x, y) = (e, \frac{1}{e})) \\ &\quad + p((x, y) = (\frac{1}{e}, e)) + p((x, y) = (\frac{1}{e}, \frac{1}{e})) \\ &= \frac{2}{12} \times \frac{2}{12} + \frac{2}{12} \times \frac{6}{12} + \frac{2}{12} \times \frac{6}{12} + \frac{6}{12} \times \frac{6}{12} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

En résumé :

$$p(X = 0) = \frac{1}{9}, p(X = 1) = \frac{4}{9}, p(X = \sqrt{2}) = \frac{4}{9}$$

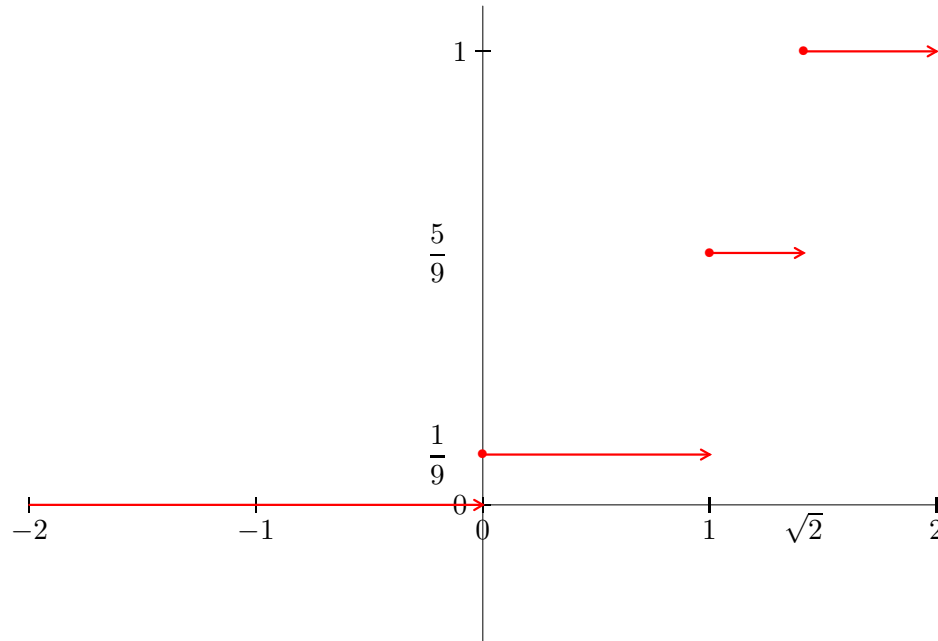
b. La fonction de répartition de  $X$  est définie par :  $F(x) = p(X < x)$ . Donc

☞ Si  $x \leq 0$ ,  $F(x) = p(X < x) = 0$ .

☞ Si  $0 < x \leq 1$ ,  $F(x) = p(X < x) = p(X = 0) = \frac{1}{9}$ .

☞ Si  $1 < x \leq \sqrt{2}$ ,  $F(x) = p(X < x) = p(X = 0) + p(X = 1) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ .

☞ Si  $\sqrt{2} < x$ ,  $F(x) = p(X < x) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = \sqrt{2}) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 1$ .



**EXERCICE 3.** L'équation caractéristique associée à  $(E)$  est

$$(E_c) : r^2 + 2r + 1 = 0 \quad \text{c'est à dire } (r + 1)^2 = 0.$$

1. Elle a une racine double égale à  $-1$ . Par conséquent la solution générale de  $(E)$  est :

$$f(x) = (ax + b) e^{-x}; \quad a \text{ et } b \text{ réels arbitraires.}$$

2. Pour que la fonction  $h : x \mapsto ax + b$  soit solution de  $(E')$  il faut et il suffit que

$$h''(x) + 2h'(x) + h(x) = x + 3 \quad (1)$$

Or  $h'(x) = a$  et  $h''(x) = 0$ . Donc l'équation devient :  $2a + (ax + b) = x + 3$  c'est à dire  $(a - 1)x + 2a + b = 0$  ou  $\begin{cases} a - 1 = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$ . Donc  $a = 1$  et  $b = -2$ . Finalement

$$h(x) = x - 2$$

3.  $\Leftrightarrow$  Soit  $g$  une solution de  $(E')$  c'est à dire une fonction telle que :

$$g''(x) + 2g'(x) + g(x) = x + 3 \quad (2)$$

En faisant la différence membre à membre de (2) et (1) on trouve :

$$\begin{aligned} g''(x) - h''(x) + 2g'(x) - 2h'(x) + g(x) - h(x) &= 0 \\ \text{c'est à dire } (g - h)''(x) + 2(g - h)'(x) + (g - h)(x) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Ce qui montre que la fonction  $g - h$  est solution de  $(E)$ .

$\Leftrightarrow$  Réciproquement  $g - h$  est solution de  $(E)$  est équivalent à (3) soit à :

$$g''(x) + 2g'(x) + g(x) = h''(x) + 2h'(x) + h(x) \quad (4)$$

Or d'après (1) le second membre de cette relation vaut  $x + 3$ . donc (4) est équivalent à

$$g''(x) + 2g'(x) + g(x) = x + 3$$

Autrement dit  $g$  est solution de  $(E')$ .

4. La fonction  $k$  est continue sur son ensemble de définition  $D_k$  qui est égal à  $\mathbb{R}$ ; de plus

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 0$$

et  $\forall x \in D_k, k'(x) = -(x+1)e^{-x}$ .

$k'$  s'annule au point  $-1$  et est  $> 0$  si et seulement si  $x+1 < 0$  c'est à dire  $x < -1$ .

Pour que le point  $I(0, 2)$  soit un point d'inflexion de la courbe  $(\mathcal{C})$  il suffit que  $k$  soit deux fois dérivable et qu'au point  $0, k''$  "s'annule en changeant de signe".

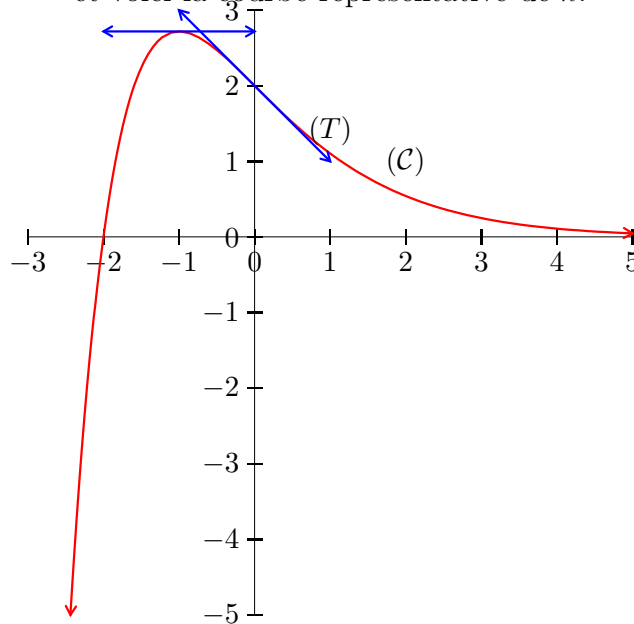
Cela est bien le cas puisque  $k''(x) = xe^{-x}$  s'annule au point  $0, est > 0$  "après  $0$ " et négatif "avant  $0$ ".

Voici le tableau de variations de  $k$ .

T.V de  $x \rightarrow k(x) = (x+2)e^{-x}$

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$k'$	+		-
$k$	$-\infty$	$e$	$0$

et voici la courbe représentative de  $k$ .



**EXERCICE 4.**

1. a. La fonction  $f$  est continue et dérivable sur  $D_f = ]-1, +\infty[$  et

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \forall x \in D_f, f'(x) = 2 \frac{1}{1+x}.$$

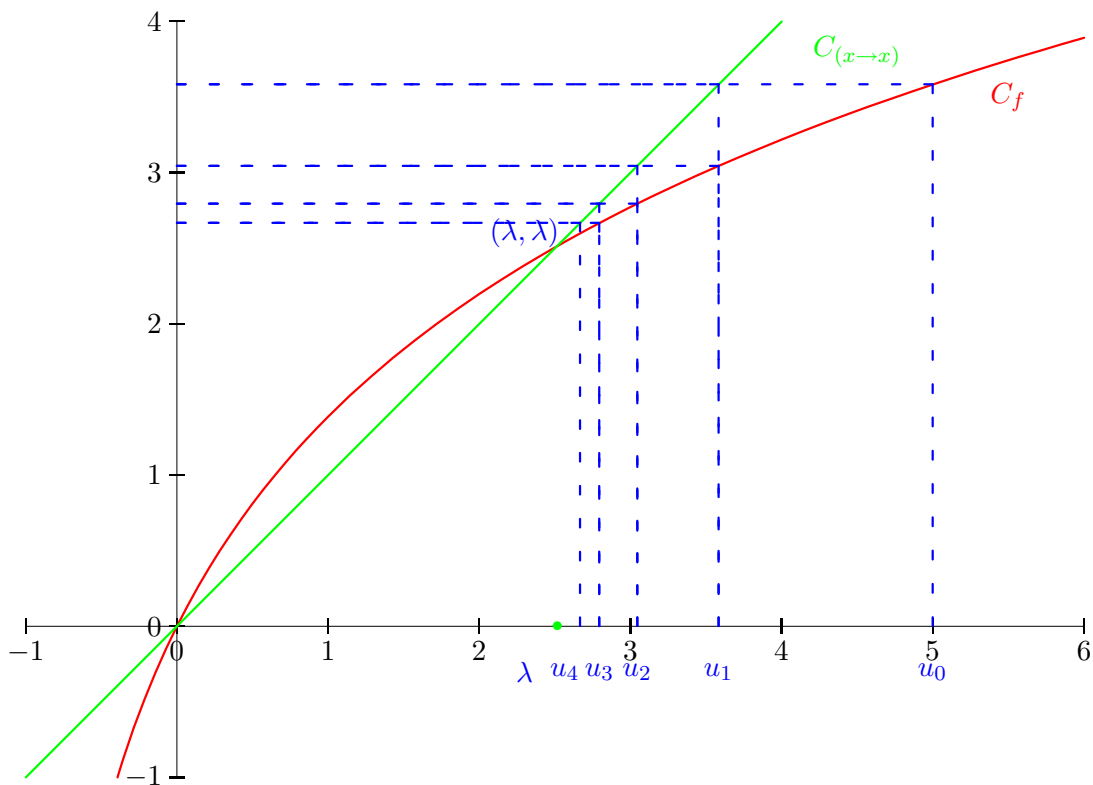
La dérivée est donc strictement positive dans  $D_f$ .

Voici le tableau de variation de  $f$ .

T.V de  $x \rightarrow f(x) = 2 \ln(1+x)$

$x$	-1	$+\infty$
$f'$	+	
$f$	$-\infty$	$+\infty$

et voici la courbe  $C_f$  ainsi que les quatre premiers termes de la suite sur le graphique.



b. La fonction  $\ell$  est continue et dérivable sur  $D_f$  et

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty; \forall x \in D_f, \ell'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1-x}{1+x}$$

Lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , nous sommes en présence d'une indétermination de la forme "  $+\infty - \infty$ ", mais on peut écrire :  $\ell(x) = x \left( \frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right)$ .

Lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $\frac{\ln(1+x)}{x}$  a pour limite 0; donc le facteur  $\frac{\ln(1+x)}{x} - 1$  a pour limite  $-1$ . Par conséquent  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ell(x) = -\infty$ .

Voici le tableau de variation de  $\ell$ .

T.V de  $x \rightarrow \ell(x) = f(x) - x; \alpha = \ell(2) = 2 \ln 3 - 2 \sim 2,2$

$x$	2	$\lambda$	$+\infty$
$\ell'$	-		
$\ell$			

La fonction  $\ell$  étant continue et strictement décroissante dans  $I = [2, +\infty[$ , réalise une bijection de  $I$  dans  $\ell(I) = J = ]-\infty, \alpha[$ ; et puisque le réel 0 appartient à  $J$ , il a dans l'intervalle  $I$  un seul antécédent par  $\ell$ , autrement dit, l'équation  $\ell(x) = 0$  a dans  $I$  une solution unique  $\lambda$ .

Ce  $\lambda$  est alors l'unique élément de  $I$  tel que  $f(\lambda) = \lambda$ .

2. a. Voir graphique.

b. La fonction  $f$  étant continue et strictement croissante dans  $I = [2, +\infty[$ , réalise une bijection de  $I$  dans  $f(I) = [f(2), +\infty[$ ; et puisque  $f(2) = 2 \ln 3 \sim 2,19$  est  $> 2$ ,  $f(I)$  est contenu dans  $I$ .

Démontrons maintenant par récurrence la propriété :  $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$  avec  $P_n : "U_n \geq 2"$

⊠ Initialisation :  $U_0 = 5$ , donnée de l'énoncé. Donc  $U_0 \geq 2$  et  $P_0$  est vrai.

⊠ Héritage : Supposons la propriété vérifiée jusqu'à un rang  $n$ , en particulier  $P_n$  vrai ( c'est à dire  $U_n \geq 2$  ou  $U_n \in I$ ) et montrons que  $P_{n+1}$  est vrai.

$$\left. \begin{array}{l} U_n \in I \quad \text{(Hypothèse de récurrence)} \\ f(I) \subset I \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{array} \right\} \Rightarrow U_{n+1} = f(U_n) \in I \Leftrightarrow U_{n+1} \geq 2$$

c.  $\forall x \in ]2, +\infty[, f'(x) = \frac{2}{1+x}$ ; donc  $\forall x \in ]2, +\infty[, 0 \leq f'(x) \leq \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$ .

Conclusion  $\forall x \in ]2, +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$ .

d. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Les réels  $U_n$  et  $\lambda$  appartiennent à  $[2, +\infty[$ , intervalle dans lequel  $|f'| \leq \frac{2}{3}$ , on peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis au couple  $(U_n, \lambda)$  :

$$|f(U_n) - f(\lambda)| \leq \frac{2}{3} |U_n - \lambda|;$$

c'est à dire, puisque  $f(\lambda) = \lambda$

$$|U_{n+1} - \lambda| \leq \frac{2}{3} |U_n - \lambda|;$$

Posons  $|U_n - \lambda| = \delta_n$ ; la relation précédente devient alors  $0 < \delta_{n+1} \leq \frac{2}{3} \delta_n$  (1).

Si au lieu de " $\leq$ " on avait " $=$ ", la suite  $\delta_n$  serait une suite géométrique et on pourrait immédiatement écrire  $\delta_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \delta_0$ . C'est pourquoi d'aucuns disent d'une suite vérifiant (1) qu'elle est **sous-géométrique**

Utilisons la même méthode : donnons à  $n$  toutes les valeurs entières possibles entre 0 et  $p$ ,  $p$  entier  $\geq 0$ ; multiplions ensuite membre à membre (Nous sommes en droit de le faire par ce que nous manipulons des **nombre positifs**). Il vient :

$$\delta_0 \delta_1 \dots \delta_p \delta_{p+1} \leq \frac{2}{3} \delta_0 \frac{2}{3} \delta_1 \dots \frac{2}{3} \delta_p$$

et en simplifiant<sup>2</sup> par  $\delta_0 \delta_1 \dots \delta_p : 0 < \delta_{p+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} \delta_0$  c'est à dire (tout en remplaçant  $p$  par  $n$ )

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < |U_{n+1} - \lambda| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} |U_0 - \lambda| \quad (2)$$

$\ell(2) \sim 2, 2$  est positif,  $\ell(3) \sim -2, 2$  est négatif, donc d'après le [théorème des valeurs intermédiaires](#),  $\lambda$  est compris entre 2 et 3.

Puisque  $U_0 = 5$ , on en déduit que  $|U_0 - \lambda| \leq 3$  et la relation (2) entraîne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < |U_{n+1} - \lambda| \leq 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Cette dernière relation s'écrit aussi :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \delta_{n+1} \leq 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$

En remarquant que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ , on conclut par le [théorème des gendarmes](#) que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_{n+1} = 0$ , soit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$ , c'est à dire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n - \lambda| = 0$ , enfin  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lambda$

e. La relation  $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \lambda| \leq 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$  s'écrit aussi  $\forall n \in \mathbb{N}^*, |U_n - \lambda| \leq 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ .

Donc pour qu'un entier  $n$  vérifie  $|U_n - \lambda| \leq \frac{1}{10^2}$ , il suffit que  $2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{10^2}$ .

Cette relation est équivalente à :  $\ln \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \leq \ln \frac{1}{200}$  c'est à dire  $(n-1) \ln \frac{2}{3} \leq -\ln 200$  ou  $n-1 \geq \frac{\ln 200}{\ln 3 - \ln 2}$ , finalement  $n \geq \frac{\ln 200}{\ln 3 - \ln 2} + 1$ .

Le plus petit entier vérifiant cette relation est  $p = E\left(\frac{\ln 200}{\ln 3 - \ln 2} + 1\right) + 1 = 15$

---

2. En toute rigueur, avant de simplifier, il faut s'assurer qu'aucun des  $\delta_p$  n'est nul. En fait, on peut montrer que c'est le cas ici. Dans le cas général, si un des  $\delta_p$  est nul, la suite est stationnaire donc convergente.