Étude d'une fonction trigonométrique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}$

1. Montrer que f est 2π−périodique.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = \dfrac{3\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)} = \dfrac{3\sin(x)}{2+\cos(x)} = f(x)$ donc f est 2π−périodique.

2. Étudier la parité de f.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \dfrac{3\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = \dfrac{-3\sin(x)}{2+\cos(x)} = -f(x)$ donc f est impaire.

3. a) Calculer $f'(x)$.

$f = \dfrac{u}{v}$ donc $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u(x) = 3\sin(x) & \text{et} \quad u'(x) = 3\cos(x) \\ v(x) = 2+\cos(x) & \text{et} \quad v'(x) = -\sin(x) \end{cases}$

d'où $f'(x) = \dfrac{3\cos(x)(2+\cos(x)) - 3\sin(x)(-\sin(x))}{(2+\cos(x))^2} = \dfrac{6\cos(x)+3\cos^2(x)+3\sin^2(x)}{(2+\cos(x))^2}$

soit $f'(x) = \dfrac{6\cos(x)+3\overbrace{(\cos^2(x)+\sin^2(x))}^{=1}}{(2+\cos(x))^2} = \dfrac{6\cos(x)+3}{(2+\cos(x))^2}$

b) Étudier le sens de variations de f sur l'intervalle $[\,0\,;\,\pi\,]$.

$\forall\, x \in [\,0\,;\,\pi\,]$, $(2+\cos(x))^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $6\cos(x)+3$:

$$\begin{aligned} 6\cos(x)+3 \geq 0 &\iff \cos(x) \geq \frac{-3}{6} \\ &\iff \cos(x) \geq -\frac{1}{2} \\ &\iff x \in \left[\,0\,;\frac{2\pi}{3}\,\right] \end{aligned}$$

$f(0) = 0$

$f(\pi) = 0$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{3\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{3\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{3}$	↘	0

4. En utilisant la question 2. , dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[\,-\pi\,;\,\pi\,]$.

La fonction f est impaire donc par symétrie par rapport à 0 :

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0		$+$		0	$-$	0
$f(x)$	0	↘	$-\sqrt{3}$	↗	0	↗	$\sqrt{3}$	↘	0

5. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

a) Déterminer une équation de la tangente (T_0) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

$(T_0) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ avec $f'(0) = \dfrac{6\cos(0)+3}{(2+\cos(0))^2} = 1$ et $f(0) = 0$

donc $(T_0) : y = x$

b) Construire (T_0) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-dessous.