F. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$. Justifier.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 4 \times 2 \times 2 = 25 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\,a} = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2}$. $\qquad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+5}{4} = 2$.

   $\boxed{S = \left\{-\dfrac{1}{2}; 2\right\}.}$

2. Déterminer le tableau de variation de f. Justifier.
   f est une fonction du second degré avec $a = 2 > 0$, donc la parabole est tournée vers le haut.
   Calculons les coordonnées du sommet.
   $x_S = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{3}{4}$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25 \qquad y_S = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-25}{8}$.

   Ainsi,

x	$-\infty$	$3/4$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-25/8$	$\nearrow$

3. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = 3x + 6$.
   Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{C}$.

   On résout l'équation $f(x) = 3x + 6$

   $$2x^2 - 3x - 2 = 3x + 6 \qquad 2x^2 - 6x - 8 = 0 \qquad x^2 - 3x - 4 = 0$$

   $\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$.
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-5}{2} = -1$. $\qquad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+5}{2} = 4$.
   En remplaçant x par -1 dans l'équation de $\mathscr{D}$,
   $y = 3 \times (-1) + 6 = 3$.
   En remplaçant x par 4, il vient $y = 3 \times 4 + 6 = 18$.
   $\boxed{\mathscr{C} \text{ et } \mathscr{D} \text{ se coupent en } M(-1;3) \text{ et } N(4;18).}$

4. Pour tout nombre k réel, on appelle $\mathscr{D}_k$ la droite d'équation $y = 3x + k$.

   Déterminer tous les réels k tels que la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_k$ n'aient aucun point d'intersection.
   On cherche p de sorte que l'équation $f(x) = 3x + k$ n'ait pas de solution.

   $$\begin{aligned} 2x^2 - 3x - 2 &= 3x + k \\ 2x^2 - 6x + (-2 - k) &= 0 \end{aligned}$$

   $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \times 2 \times (-2 - k) = 36 + 8 \times (2 + k) = 52 + 8k$.
   L'équation $f(x) = 3x + k$ n'a pas de solution ssi $\Delta < 0$.

   $$\begin{aligned} 52 + 8k &< 0 \\ 8k &< -52 \\ k &< -6,5 \end{aligned}$$

   $\boxed{\mathscr{C} \text{ et } \mathscr{D}_k \text{ n'ont aucun point d'intersection lorsque } k < -6,5.}$