Suites Récurrentes : formes variées / المتتاليات الترجعية : متنوعة

$2^{ième}$ Bac Sciences maths A et B : Semestre I

1) 2ième Bac Sc. Maths ammarimaths-bm

1) *On considère la fonction g définie sur* $I = [1,+\infty[$ *par :*

$$g(x) = x^3 - 3x - 5$$

a) *Etudier les variations de la fonction g et montrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique* α telleque $2 \prec \alpha \prec \frac{5}{2}$.

b) *Etudier le signe de g(x) sur I , en déduire les solutions de l'inéquation :* $(E)\colon\ x - \sqrt[3]{3x+5} \geq 0$ *sur I .*

2) *On considère la fonction f définie sur* $I = [1,+\infty[$ *par :*

$$f(x) = \sqrt[3]{3x+5}$$

c) *Etudier les variations de la fonction f sur I.*

d) *Montrer que :* $f\left(\left[\alpha,\frac{5}{2}\right[\right) \subset \left[\alpha,\frac{5}{2}\right[$ *sur I .*

3) *On considère la suite numérique* (U_n) *définie par :*

$$(\forall n \in IN) \quad U_{n+1} = f(U_n) \quad \text{et} \quad U_0 \geq 1$$

e) *Déterminer* U_0 *pour que la suite* (U_n) *soit stationnaire (Cte)*

f) *On prend* $U_0 = \frac{5}{2}$.

- ✓ *Montrer que :* $(\forall n \in IN)\ ;\ \alpha \prec U_n \prec \frac{5}{2}$.
- ✓ *Montrer que* (U_n) *est strictement décroissante.*
- ✓ *En déduire que* (U_n)*est convergente et calculer sa limite.*

g) *Prouver que :* $(\forall n \in IN)\ ;\ U_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{\alpha^2}(U_n - \alpha)$ *en déduire que*

$$(\forall n \in IN)\ ;\ U_{n+1} - \alpha \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2n}\left(\frac{5}{2} - \alpha\right)$$

h) *déterminer à nouveau la limite de la suite* (U_n).

2) 2ième Bac Sc. Maths ammarimaths-bm

Soit a un réel (a>0) . On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 2 + \frac{a}{x}$$

4) *Etudier les variations de la fonction f.*

5) *montrer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique* $\alpha \succ 0$.

6) *On considère les suites* (U_n) et (V_n) et (W_n) *telles que :*

$$U_{n+1} = f(U_n) \text{ et } V_{n+1} = U_{2n} \text{ et } W_{n+1} = U_{2n+1}$$

i) *Montrer que* $(\forall n \in IN)\ ;\ 0 \prec V_n \prec \alpha \prec W_n$

j) *Montrer que* $(\forall n \in IN)$; $W_{n+1} - V_{n+1} \prec \dfrac{a}{2V_n + a}(W_n - V_n)$

k) *Montrer que* (V_n) *est strictement croissante et que* (W_n) *est strictement décroissante, en déduire que* (V_n) et (W_n) *convergent.*

l) *Montrer qu' »il existe un réel k indépendant de n tel que :*
$0 \prec k \prec 1$ et $(\forall n \in IN)$; $W_{n+1} - V_{n+1} \prec k(W_n - V_n)$

m) *En déduire que* (V_n) et (W_n) *sont adjacentes et déterminer leur limite.*

3) 2ième Bac Sc. Maths **ammarimaths-bm**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle α $I = [0, \sqrt[3]{3}]$ *par :*

$$f(x) = \frac{9x}{x^3 + 6}$$

7) *Montrer que* $f(I) = I$.

8) *On considère les suites* (U_n) *telles que :*

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ (\forall n \in IN)\ ;\ U_{n+1} = \dfrac{9U_n}{U_n^{\ 3} + 6} \end{cases}$$

n) *Montrer que* $(\forall n \in IN)$; $1 \le U_n \le \sqrt[3]{3}$

o) *Etudier les variations de* (U_n) *en déduire qu'elle est convergente.*

p) *Calculer la limite de* (U_n) .

4) 2ième Bac Sc. Maths **ammarimaths-bm**

On considère la suite numérique (U_n) *définie par :*

$$\begin{cases} U_0 = a \quad \text{et} \quad a \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[\\ (\forall n \in IN)\ ;\ U_{n+1} = U_n - U_n^{\ 2} \end{cases}$$

1)

a) *Montrer que* $(\forall n \in IN)$; $0 \prec U_n \prec \dfrac{1}{n+2}$

b) *Montrer que* $(\forall n \in IN^*)$; $U_{n+1} = \dfrac{1}{4} - \left(U_n - \dfrac{1}{2}\right)$

c) *Montrer que* $(\forall n \in IN)$; $\dfrac{n}{(n+1)^2} \prec \dfrac{1}{n+2}$

2) *Montrer que est croissante, en déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite de deux façons différentes.*

3) *Soit la suite* (V_n) *, telle que pour tout entier n de IN :* $V_n = n.U_n$

a) *Montrer que* $(\forall n \in IN)$; $V_{n+1} - V_n = U_n(1 - (n+1))$, *en déduire que* (V_n) *est strictement croissante.*

b) *Montrer que* (V_n) *est convergente et que* $0 \le \lim\limits_{n \to +\infty} V_n \le 1$

4) *Soit la suite* $(\mathrm{W_n})$ *, telle que :* $(\forall n \in IN^*)$; $\mathrm{W_n} = \mathrm{n}.(V_{n+1} - V_n)$

a) *Montrer que* $(\forall n \in IN^*)$; $\mathrm{W_n} = V_n.\left(1 - \frac{n+1}{n.}.V_n\right)$.

b) *En déduire que* $(\mathrm{W_n})$ *est convergente et que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{W_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{V_n}(1 - \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{V_n})$.

c) *Montrer que* $(\mathrm{V_n})$ *est convergente et que* $0 \le \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S_n} \le 1$

5) Soit $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{W_n}$. *On suppose* $L \ne 0$

a) *Montrer que* $L \succ 0$

b) *Montrer que* $\frac{\mathrm{n}}{2\mathrm{n}-1} \le \sum\limits_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k}$

c) *Montrer qu'il existe* $\mathrm{p_0} \in IN$ *tel que :* $(\forall n \succ p_0)$; $\frac{\mathrm{L}}{2} \prec \mathrm{W_n} \prec \frac{3\mathrm{L}}{2}$.

d) *En déduire que* $(\forall n \succ p_0)$; $\frac{\mathrm{L}}{2}.\frac{n}{2n-1} \prec V_{2n} - V_n$

e) *En déduire alors que* $L = 0$.

6) *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{V_n} = 1$.

5) 2ième Bac Sc. Maths ***ammarimaths-bm***

9) *Montrer par récurrence que :* $(\forall n \ge 8)$; $(\mathrm{n}-1)! \ge 2^n$

10) *On considère la suite numérique* $(\mathrm{U_n})$ *définie par :*

$$\begin{cases} U_0 = 1 \quad \text{et} \quad U_1 = 2 \\ (\forall n \in IN) \ ; \ (\mathrm{n}+2)(n+1)U_{n+2} + 4(\mathrm{n}+1)\mathrm{U_{n+1}} + 4U_n = 0 \end{cases}$$

Soit la suite $(\mathrm{V_n})$ *, telle que pour tout entier n de IN :* $\mathrm{U_n} = \frac{V_n}{n!}$

q) *Montrer que* $\mathrm{S_n}$ *vérifie la relation :*

$$(i) \ : \ V_{n+2} + 4\mathrm{V_{n+1}} + 4V_n = 0 \quad \text{pour tout n} .$$

r) *En déduire* $\mathrm{V_n}$ *puis* $\mathrm{U_n}$ *en fonction de n.*

s) *Montrer que* $(\forall n \ge 8)$; $|\mathrm{U_n}| \prec \frac{1}{n(n-1)}$

11) *On considère la suite* $(\mathrm{S_n})$ *telle que pour tout entier naturel n,*

$$\mathrm{S_n} = \sum_{k=0}^{n} U_k$$

Et les suites $(\mathrm{a_n})$ et $(\mathrm{b_n})$ *telles que* $\mathrm{a_n} = \mathrm{S_{2n}}$ et $\mathrm{b_n} = \mathrm{S_{2n+1}}$

t) *Montrer que les suites* $(\mathrm{a_n})$ et $(\mathrm{b_n})$ *sont adjacentes. Soit l leur limites commune.*

u) *Montrer que :* $(\forall n \ge 8)$; $|\mathrm{S_n} - a_n| \prec \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k(k-1)}$.

v) *Calculer* $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k(k-1)}$ *en fonction de n, en déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} |S_n - a_n|$

w) *En remarquant que* $\left|S_n - l\right| \prec \left|S_n - a_n\right| + \left|a_n - b_n\right|$ *, montrer que :*

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = l$.

6) 2ième Bac Sc. Maths **ammarimaths-bm**

On considère la suite numérique (U_n) *définie par :*

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ (\forall n \in IN) \; ; \; U_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{U_n} - \dfrac{2}{U_n^{\,2}} = 0 \end{cases}$$

12) *Montrer que est minorée par 2.*

13) *Vérifier que pour tout x réel :* $-x^3 + 2x^2 + x - 2 = (2 - x)(x^2 - 1)$

14) *Montrer que la suite* (U_n)*est décroissante.*

15) *Montrer que :* $(\forall \in IN) \; ; \; U_{n+1} - 2 \le \dfrac{1}{4}(U_n - 2)$

16) *En déduire que :* $(\forall \in IN) \; ; \; U_n - 2 \le \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

17) *Calculer :* $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

fin