المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة الرباط سلا زمور زعير نيابة سلا	**الامتحان التجريبي الموحد** **للسنة الثانية من سلك البكالوريا** **دورة مـــاي 2010**	الصفحة $\frac{1}{3}$

المادة:	**الرياضيات**	**المعامل:**	**9**
الشعب(ة) أو المسلك :	**العلوم الرياضية (أ) و (ب)**	**مدة الإنجاز:**	**4**

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

التمرين 1: (3 ن)

نعتبر المجموعة: $E=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix} x+y\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2}y \\ \frac{-\sqrt{2}}{2}y & x-y\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} / (x,y)\in IR^2\right\}$ ونضع: $E^*=E\setminus\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

1) بين أن $(E,+)$ زمرة جزئية من $(\mathrm{M}_2(IR);+)$. 0.5

2) بين أن $(E;\times)$ جزء مستقر من $(\mathrm{M}_2(IR),\times)$. 0.5

3) نعتبر التطبيق:

$$\varphi : C\to E$$
$$x+iy\mapsto M(x,y)$$

أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(C,\times)$ نحو $(E,\times)$ وحدد مماثل كل عنصر من E^* . 0.75

ب) استنتج أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي. 0.75

ج) نضع $A=M(1,1)$ ، بين أن $A^n=2^{\frac{n}{2}}M(\cos(\frac{n\pi}{4}),\sin(\frac{n\pi}{4}))$ $(\forall n\in IN^*)$, 0.5

التمرين الثاني (4 ن)

I) نعتبر في المجموعة C المعادلة : $(E): z^2-\alpha(1+i)z+i\alpha^2=0$ حيث α عدد عقدي معلوم

1) حل المعادلة (E). 0.5

2) نفترض أن $\alpha=e^{i\theta}$ حيث $\theta\in]0;\pi[$ اكتب z_1+1 و z_2+1 على الشكل المثلثي حيث z_1 و z_2 هما حلا المعادلة (E) . 0.5

II) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر النقطة $A(\alpha)$ و التطبيق F الذي يربط كل نقطة M ذات اللحق z بالنقطة M' ذات اللحق z' حيث : $z'=(1+i)z-i\alpha$

1) تحقق من أن : $z'-z=i(z-\alpha)$. 0.25

2) استنتج طبيعة المثلث AMM'. 0.5

3) حدد ω لحق النقطة Ω الصامدة بالتطبيق F. 0.25

4) بين أن F هو مركب دوران r وتحاك h و أعط الكتابة العقدية لكل واحد منهما محددا عناصرهالمميزة. 0.75

5) نضع $\alpha = i$ و نعتبر النقط $A_0(1+i)$ و $A_n(z_n)$ و $A_{n+1}(z_{n+1})$ حيث $F(A_n)=A_{n+1}$ حيث $z_0=1+i$	
أ) بين أن : $z_{n+1}-i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_n-i)$ $(\forall n\in IN)$.	0.5
ب) استنتج أن : $z_n-i=\left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$ $(\forall n\in IN)$.	0.25
ج) حدد قيم n لكي تكون النقط A, A_0 , A_n مستقيمية.	0.5
<u>التمرين الثالث :</u> (3 ن)	
ليكن $n\in IN$ نضع: $p=11n+2$, $q=50n+9$ ونعتبر أن : $d=p\wedge q$	
1)	
أ) **بين** أن: $d=1$.	0.5
ب) باستعمال خوارزمية اقليدس، حدد حلا خاصا للمعادلة : $50x-11y=1$: (1) .	0.5
ج) استنتج في $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة (1) .	0.5
2) ليكن $a\in\mathbb{Z}$, نفترض أن $a\wedge 11=1$	
أ) حدد باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{10} على 11.	0.5
ب) بين أن : $a^{p+q}\equiv a^{n+1}[11]$.	0.75
ج) حدد قيما للعدد n لكي يكون $a^{p+q}\equiv 1[11]$.	0.25
<u>مسألة :</u> (10ن)	
نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f_n(x)=\frac{e^{nx}}{x^2}-1$ $(\forall n\in IN)$	
<u>الجزء I</u> : نأخذ $n=1$	
1) احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f_1(x)$.	0.5
2) أدرس الفروع اللا نهائية لمنحنى الدالة f_1.	0.75
3) أحسب $f_1'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$ ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة f_1 على $\mathbb{R}^*$.	0.5
4) بين أن h قصور الدالة f_1 على المجال $]0;2[$ تقابل من $]0;2[$ نحو مجال J يجب تحديده.	0.5
5) احسب $f(1)$ و $(h^{-1})'(e-1)$.	0.25
6) أنشئ منحنى الدالة f_1 في معلم متعامد ممنظم.	0.5
<u>الجزء II</u>	
1) أدرس تغيرات f_n على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.	0.5
2) بين أن المعادلة: $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $]-\infty;0[$.	0.5
3) ادرس إشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ على المجال $]-\infty,0[$.	0.25

4) استنتج الوضع النسبي ل (C_n) , (C_{n+1}) على المجال $]-\infty,0[$.	0.25
5) بين أن المتتالية (α_n) تزايدية واستنتج أنها متقاربة .	0.5
6) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$.	0.5
7) نضع: $w_n=\sum\limits_{k=1}^{k=n}\frac{\alpha_k^2}{k^2}$: $\forall n\in IN^*$ ؛ بين أن المتتالية (w_n) تزايدية ثم استنتج أنها متقاربة. (لاحظ: $\forall k\geq 2\ ;\ \frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k(k-1)}$)	0.5

الجزء III

نعتبر الدالة العددية F المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} F(x)=x\int_x^{2x}\frac{e^t}{t^2}dt \quad ; \quad x\neq 0 \\ F(0)=\frac{1}{2} \end{cases}$$

1) بين أن F معرفة على IR .	0.25
2)	
أ) بين أن : $(\forall x\geq 0)\ \frac{e^x}{2}\leq F(x)\leq\frac{e^{2x}}{2}$ وأن $(\forall x\leq 0)\ \frac{e^{2x}}{2}\leq F(x)\leq\frac{e^x}{2}$.	0.5
ب) استنتج أن F متصلة في الصفر .	0.25
3) احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$.	0.5
4)	
أ) بين أن : $(\forall x\in IR^*)\quad F(x)=e^x-\frac{e^{2x}}{2}+x\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.	0.5
ب) بين أن F قابلة للاشتقاق على IR^* وأن $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ F'(x)=x\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.	0.5
5)	
أ) بين أن $(\forall x\geq 0)\ e^x\ln 2\leq\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\leq e^{2x}\ln 2$ و أن $(\forall x\leq 0)\ e^{2x}\ln 2\leq\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\leq e^x\ln 2$.	0.5
ب) ب- استنتج $\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.	0.25
6)	
أ) تحقق أن : $(\forall x\in IR^*)\quad F(x)-\frac{1}{2}=-\frac{(e^x-1)^2}{2}+x\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.	0.25
ب) استنتج أن F قابلة للاشتقاق في الصفر.	0.25
ج) أعط جدول تغيرات F .	0.25